Math. P.
171

Math. P 171.

Mathesis. Geometria generalis
270.

Erste
Geometrie
für
Kinder und Jünglinge
und fürs
gemeine Leben.

Dessau, 1784
Auf Kosten der Verlagskasse für Gelehrte und Künstler, und zu finden in Leipzig, in der Buchhandlung der Gelehrten.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Herrn Canonicus

Gleim

in Halberstadt.

Eine lebhafte Erinnerung an jene mir unvergeßlichen Tage, worin ich Sie, verehrungswürdiger Freund und Gönner, persönlich und in Ihrem engern Kreise kennen lernte, veranlaßt den Wunsch, Ihnen meine vorzüglichste Hochach-

)(tung

tung öffentlich zu bezeugen. Ich wähle dazu die gegenwärtige Gelegenheit und brauche meine Wahl bey dem Publico nicht zu rechtfertigen, welches in Ihnen nicht bloß den ausgezeichneten Dichter von eigenem Nahmen, sondern auch den Mann von weitem Hertzen und Verstande verehrt, der jede Art des Nützlichen und Wissenswürdigen zu umfassen und zu beurtheilen weiß, mit vorzüglicher Theilnehmung aber alles beachtet, was mit Erziehung oder Unterricht Verbindung hat. Lassen Sie mich indessen meine Wahl noch aus einem andern und wichtigern Grunde betrachten.

Dies Buch wird meiner Absicht nach von mehrern Jünglingen gebraucht werden. Nur wenigen von ihnen hat vielleicht die Natur solche Gaben ertheilet, durch deren eifrigste Ausbildung es ihnen möglich werden könnte, dereinst wie

Gleim

Gleim in Teutschlahd genannt zu werden. Nicht alle die von der Jugend an bis in ihr ehrwürdiges Alter viel und edel handelten, jedes Unterdrückten Rath und Zuflucht, jedes aufkeimenden — auch des verachteten — Guten Beförderer seyn wollten, gelangen so weit, daß die Weisen aus der Ferne sie aufsuchen und die Edelsten von beyden Geschlechtern sich zu ihnen drängen, um sie wie Väter der Menschheit öffentlich zu nennen und zu verehren. — Aber von allen, die ihm nahe und seiner Beachtung werth sind, sich geliebt zu wissen, am Abend seines Lebens mit Wohlgefallen auf die durchwandelte Bahn zurückzuschauen nnd mit frohem Muthe den Aufschlüssen der Ewigkeit entgegen zu gehen: das ist jedem Jünglinge vergönnt, der dies lieset — wenn er bey Zeiten, von dem gegenwärtigen Augenblicke an, thätig und gut

zu

zu werden sich bestrebt und die Kräfte ausbildet, welche ihm verliehen sind, um einem solchen Manne ähnlich zu werden, für welchen **unser Gleim** auch in seiner Nähe verehrt wird.

Vorrede.

Schwerlich würde ich mich jemahls zur Herausgabe einer Kindergeometrie, zur Ausarbeitung der gegenwärtigen aber jetzt eben gewiß nicht entschlossen haben, wenn nicht einige sehr gangbare und wohlfeile Bücher dieser Art ungemein viele neuere Meynungen, Gründe und Erklärungen unter das junge und alte Publikum zu verbreiteu fortführen. Diese Beobachtung brachte mich vor einigen Monaten auf den Gedanken, daß es ein verdienstliches Werk sey, unter demselben Titel ein neues Büchelchen bekannt zu machen, welches nichts enthielte, was mit den wesentlichen Lehren der uralten Geometrie im Widerspruche stehet, und in so fern wenigstens unschädlich wäre.

Indessen glaube ich, daß der gegenwärtige Versuch nicht nur zu einer nützlichen Unterhaltung und Vorbereitung für Kinder, wie sie anjetzt von vielen Hofmeistern verlangt wird, dienen könne; sondern daß

man auch bey ältern Schülern den ersten Sinn für die Geometrie durch eine solche Vorbereitung erwecken müsse, wobey man sogleich zur practischen Anwendung der ersten Lehren schreitet und das Bedürfniß weiterer Kenntnisse allenthalben fühlen läßt. Dergleichen vorbereitende Geometrie muß aber nicht zu lange dauern, nicht zu vielen Lehrsätzen den Reiz der Neuheit benehmen, und dadurch den künftigen gründlichern Unterricht weniger angenehm machen — der übrigens meiner Meynung nach so lange immer noch zu früh kommt, als die Lehrlinge einen kinderlichen Vortrag deutlich und angenehm finden können.

Ferner pflegen auch Erwachsene sehr häufig zu den jetzt gewöhnlichen Kinderbüchern zu greifen, wenn sie irgend worinn einen leichten und faßlichen Unterricht zu wünschen haben. Sehr oft ist nun jemanden, der ausserdem mit der Geometrie nichts zu thun hat, doch daran gelegen, die Größe seiner Gärten, Wiesen und Aecker etwas genau zu kennen: und da ich eben erfahren hatte, daß einige Oekonomen nach der Anleitung einer kleinen Geometrie vergebliche Versuche darüber anstellen; so habe ich auf dies Bedürfniß vorzüglich Rücksicht genommen, und deshalb auch die Berechnung des Flächenraumes aus den Seiten der Dreyecke allgemein verständlich vorgetragen. Diese Meßart ist keineswegs neu, aber bisher doch gerade denenjenigen nicht mitgetheilt worden, für die sie gleichwohl bey vielen schiefwinkligen Flächen die einzige brauchbare bleibt; weil man sie ohne Winkel-

messer, ohne Fertigkeit im Zeichnen und ohne Kenntnisse von den verjüngten Figuren wirklich ausüben kann. Es könnte wohl nicht schaden, wenn man jedem künftigen Bürger oder vorzüglichen Landmanne schon auf Schulen dazu Unterricht ertheilte: hauptsächlich aber ist alles hieher gehörige, so wie jeder mit einem Sterne (*) bezeichnete Absatz für die Erwachsenen geschrieben, deren ich eben erwähnt habe, und diese können dagegen alles, was mit zwey Sternen (**) bezeichnet, und für angehende Lehrer eingeschaltet ist, überschlagen. Der letztern wegen mögen auch noch folgende Erörterungen nöthig seyn.

Zu jeder Erklärung, die ich mir von dem Begriffe des Winkels zu machen weiß, muß ich jedesmahl noch eine verneinende Bestimmung hinzufügen, wenn ich die Summe zweyer rechten Winkel aus dem Gebiete ihrer Brüder verstoßen, und den engern Umfang der gewöhnlichsten Erklärung erhalten will. Dadurch wird aber nicht nur das Gesetz der Stätigkeit zwischen den hohlen und erhabnen Winkeln unterbrochen; sondern es würde auch der ganze Grundsatz von der Gleichheit aller rechten Winkel entbehrlich werden, wenn man den rechten Winkel als die Hälfte einer gerade entgegengesetzten Neigung betrachten wollte, die man dann etwan einen gestreckten Winkel nennen könnte. Vielleicht habe ich an einem andern Orte Gelegenheit davon umständlicher zu reden. Für jetzt bin ich über die Erweiterung der alten Euklidischen Erklärung schon dadurch hinlänglich gerechtfertigt, daß ich den Herrn

Hof-

Hofrath Karsten als meinen Gewährsmann anführen kann. M. s. Dessen Lehrbegriff der gesammt. Mathemat. 1778. §. 21.

In mehreren Lehrbüchern scheint man der bestimmten Erklärung von demjenigen, was man unter einer Figur verstehen solle, mit Vorbedacht auszuweichen, und sich Statt dessen mit Beschreibungen im logikalischen Sinne zu behelfen. Freylich will man in solchen gleichgültigen Dingen gerne dem einmahl eingeführten folgen, und wird dann unwillig über solche — Kleinigkeit, wenn man nach vielem Nachschlagen wirklich nicht entscheiden kann, ob andere diesen Nahmen bloß auf Flächen oder gar auf Ebnen einschränken wollen; oder ob sie ihre Erklärungen nur in Beziehung auf die Planimetrie verfertigt haben. Ich glaubte am sichersten zu gehen, wenn ich des Herrn Hofrath Kästners Erklärung wörtlich abschriebe. Vorausgesetzt, daß man darinn das Prädicat zum Subjecte machen dürfe; so hat wenigstens ein klassischer Lehrer Deutschlands das Wort Figur ausdrücklich auf Flächen eingeschränkt, und dabey könnte es meines Erachtens füglich sein Bewenden haben. Nach Euklides Definition †) müßte es freylich nicht nur körperliche, sondern auch Längen-Figuren geben: denn auch krumme Linien werden durch zwey Endpuncte eben so gut eingeschlossen,

†) Figur ist, was von einer, oder mehrern Grenzen eingeschlossen wird.

sen, als krumme Flächen durch ihre Grenzlinien. Man wird aber einer bloßen Linie allemahl lieber eine Gestalt, als eine Figur zuschreiben; und den bekannten Satz in der Naturlehre, daß jeder Körper eine Figur habe, kann man dadurch ausdrücken, daß man jedem Körper einen begrenzten Raum beylegt.

Zugestandne Sätze habe ich solche Behauptungen genannt, die man dem Anfänger zu Gefallen wie Grundsätze annimmt und erläutert, bey einem gründlichen Vortrage aber als Lehrsätze erweisen kann.

Die vorbereitenden Erklärungen leisten für den ersten Anfänger eben so viel als die wahren Erklärungen; z. B. von Punct und Linien in §. 1 und 4 verglichen mit S. 66. Ich weiß, daß manche daran verzweifeln, ob sie irgend etwas von den geometrischen Lehren über die Ausdehnung verstehen werden, wenn man gleich Anfangs die Vorstellung eines Punctes ohne alle Ausdehnung von ihnen fordert.

Will man seine Schüler den Beweis von der Gleichheit zweyer Winkel, Linien oder Flächen auffinden lassen; so ist es sehr natürlich und bequem, daß man sie auf die mögliche Deckung solcher Dreyecke aufmerksam macht, worinn diese beyden Größen vorkommen, und alsdann erst aus der erwiesenen Deckung der Dreyecke auf die Gleichheit ihrer einzelen Stücke schliessen läßt. Der Hr. Prof. Schütz sowohl

als

als der Herr Prof. Michelsen weisen ihren Lehrlingen denselben Gang an, und beyde schrieben nach eignen Erfahrungen in dem Unterrichte junger Anfänger. Ich habe deshalb ebenfalls kein Bedenken getragen, die hieher gehörigen Lehrsätze der angeführten Betrachtung gemäß vorzustellen und zu gebrauchen, ob man sich gleich dadurch von dem weit kürzern und nettern Vortrage entfernet, der z. B. in des Herrn Hofrath Kästners Geometrie gefunden wird. Bey dieser gewählten Schlußfolge aber wird es nothwendig, ein besonderes Zeichen für den Begriff der Deckung zu gebrauchen; wofern man es unbequem findet, ihn jedesmahl durch Worte auszudrücken. Sonst hat man nicht selten folgenden Schluß vor Augen: weil das △ABC = △DEF ist, so muß △ABC = △DEF seyn, und muß ihn lesen: weil sich das Dreyeck ABC mit dem Dreyecke DEF decken kann, so muß der Flächenraum des Dreyeckes ABC gleich seyn dem Flächenraume des Dreyeckes DEF. Ich habe dazu das natürlichste Zeichen ≌ gewählt, welches aus denen der Aehnlichkeit und der Gleichheit zusammengesetzt und auch schon von dem Hrn Rector Lorenz in seiner musterhaften Uebersetzung des Euklides gebraucht ist. Oft kommt man in den Fall, daß man die Eigenschaft der möglichen Deckung auch vermittelst des Adjectives auszusprechen wünscht: dazu habe ich z. B. in §. 114 das Wort **deckend** gebraucht, weil ich fürchtete, daß das bessere **decksam** zu neu oder auffallend scheinen mögte.

Zwey

Zwey parallele Bogen waren sonst das allgemeine Zeichen des Parallelismus, die man aber, ihrer grossen Unbequemlichkeit wegen, seit einigen Jahren gegen verschiedene andere vertauscht hat. Unter diesen allen scheint mir das halb verwendete Gleichungszeichen, welches wohl der Herr Professor Hindenburg am ersten gebraucht hat, am besten gewählt zu seyn. Es beleidigt das Auge weniger, als die anderen Vorschläge, macht den Druckereyen keine neuen Kosten und gestattet eine sehr analogische Bezeichnung für das Gegentheil des Parallelismus, wozu die halbe Verwendung von dem einen Zeichen der Ungleichheit gebraucht wird.

Die Nahmen der einseitigen innern und der gleichliegenden Winkel in §. 155 sind freylich neu: man hat aber für diese Winkel schon immer sehr verschiedene Benennungen erfunden, worunter mir keine ganz natürlich und für den ersten Unterricht bequem genug schienen.

In Beziehung auf §. 255 will ich endlich nur noch zeigen, warum ich die Zerfällung mit Fleiß auf 2 Factoren eingeschränkt habe. Es sey $P = A.B$; $a + \alpha = \sqrt{A}$ und $b + \beta = \sqrt{B}$ indem a und b die unvollkommenen Quadrat-Wurzeln aus den Tafeln, oder den Zahlen mit zwey Decimal-Brüchen bedeuten, welche man Statt der nahen Wurzeln gebraucht; so begeht man, weil $ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta = \sqrt{A}.\sqrt{B}. = \sqrt{P}$ wird, den Fehler $a\beta + b\alpha + \alpha\beta$

wenn

wenn man ab Statt $\sqrt{P}$ gebraucht. Um nun eine Grenze über alle möglichen Fehler zu bestimmen; so sey α sowohl als β positiv und $= 0{,}005$; ferner sey a sowohl als b die gröste Wurzel, welche in den Tafeln nur vorkommt, und ebenfalls um den Fehler 0,005 vergrößert, obgleich nach S. 155 kein Fehler ganz so viel beträgt. Dann wäre, weil $\alpha\beta = 0{,}00025$ in keine Betrachtung kommt, der übrige Fehler $= a\beta + b\alpha = 31{,}627 . 0{,}005 + 31{,}627 . 0{,}005 = 0{,}31617$ also noch kein Ganzes.

Würde aber $P = A . B . C$ und $a + \alpha = \sqrt{A}$, $b + \beta = \sqrt{B}$; $c + k = \sqrt{C}$ gesetzt, so wäre $abc + abk + ac\beta + bc\alpha + bak + c\alpha\beta + \alpha\beta k = \sqrt{A} . \sqrt{B} . \sqrt{C} = \sqrt{P}$ und wenn man abc Statt $\sqrt{P}$ gebrauchen wollte; so würde man, nur die drey ersten Glieder des Fehlers gerechnet und wiederum $a = b = c = 31{,}627$ desgleichen $\alpha = \beta = k = 0{,}005$ gesetzt, schon mehr als 15 Ganze als die Grenze über alle möglichen Fehler erhalten.

Dessau
im October 1784.

Fr. Gottl. Busse.

Vom Puncte.

§. 1.

Vorbereitende Erklärung.

Alle Tüpfelchen, die ich bey unsern mathematischen Zeichnungen mache und Puncte nenne, müßt ihr euch so klein denken, als ihr nur immer könnet; ich meine so kurz, so schmahl und so dünne, oder so wenig lang, so wenig breit und so wenig dick, als es euch nur immer möglich ist.

§. 2.

Erläuterung. Ein Tüpfelchen mit Griffel auf einer Schiefertafel gemacht, wird euch nicht selten seine Dicke bemerken lassen. Wenn ihr nähmlich dicht über die Tafel hinsehet, so werden euch die kleinen vom Griffel abgeriebenen Stückchen in die Augen fallen, woraus das Tüpfelchen besteht. Auf glattem Papiere lassen sich nun wohl so flache Tüpfelchen

zeichnen, daß ihr keine Dicke an ihnen wahrnehmen könnet; schwerlich aber wird man euch jemals ein Fleckchen so ganz ohne alle Ausdehnung nach der Länge und Breite darstellen, daß ihr euch in seiner Mitte kein noch kleineres solltet gedenken können. Ueber dies werde ich meinen so genannten Puncten nicht einmahl alle mir mögliche Feinheit, sondern vielmehr eine sehr merkliche Größe geben, damit ihr sie geschwinde auffinden könnet. Sobald indessen der beträchtliche Raum, welchen ein solches Tüpfelchen einnimmt, eure Aufmerksamkeit besonders auf sich ziehen sollte; so denkt euch etwa dessen feinste Mitte als den Ort des Punctes, den es eigentlich bezeichnen soll.

§. 3.

Folgerung.

Ihr müßt daher niemahls behaupten wollen, daß ein Punct größer, ich meine, länger, breiter oder dicker sey, als irgend ein anderer Punct. Denn sobald ihr das thätet, so dächtet ihr euch den einen Punct, welchen ihr grösser nennet, gewiß nicht so klein, als es euch möglich ist, als ihr euch den andern Punct, welchen ihr kleiner nennet, wirklich gedenkt.

§. 4.

Vorbereitende Erklärung.

Alle Striche, die ich bey unsern mathematischen Zeichnungen mache und Linien nenne, gedenkt euch so schmahl und so dünne, ich meine, so wenig breit und so wenig dick, als es euch nur immer möglich ist.

§. 5.

Erläuterung. Auf glattem Papiere kann man leicht solche Striche verzeichnen, woran ihr keine Dicke bemerken könnet. Denkt euch dergleichen flache Striche auch so schmahl, so wenig breit, als es euch nur immer möglich ist. Und sobald ihr eine beträchtliche Breite an einer sogenannten Linie beobachtet, so denkt euch die feinste Mitte des Striches als die Lage der Linie, die ich durch den Strich eigentlich bezeichnen wollte.

§. 6.

Folgerung.

Eine Linie kann gar wohl länger seyn, als eine andere Linie. Aber niemahls müßt ihr behaupten wollen, daß eine Linie breiter oder dicker sey, als irgend eine andere Linie. Denn wenn ihr das thätet, so dächtet ihr euch die eine Linie, welche ihr breiter oder dicker nennet, zuverläßig nicht so schmahl und so dünne,

als es euch möglich ist, als ihr euch die andere Linie wirklich gedenkt.

§. 7. Zeichnung 3.

Vorbereitung. Vom Puncte A bis zum Puncte B hin sind 5 verschiedene Linien gezogen, und man könnte noch unzählige andere Linien ziehen, wodurch die beyden Puncte A und B ebenfalls mit einander verknüpft würden: aber nur eine von allen diesen Linien ist eine gerade Linie. Jede der übrigen ist entweder eine krumme Linie, wie die beyden obern in der Zeichnung; oder sie ist eine vermischte, bestehet aus krummen und geraden Linien, wie die unterste; oder sie ist aus mehrern geraden Linien zusammengesetzt, und heißt eine gebrochene Linie, wie die zweyte von unten.

** Anmerkung. Jede Linie von A bis B kann man als einen Weg betrachten, welchen ein Punct durchstreicht, der sich aus dem Orte A bis zum Orte B hin bewegt. Unter den krummen Wegen, worauf man vom Puncte A bis zum Puncte B gelangen kann, können unzählig viele durch mehrere krumme Linien oder deren Theile hindurchgeführt werden; es ist aber eben so unnöthig, als es unmöglich ist, den Anfängern in der Mathematik begreiflich zu machen, worin die Einheit einer krummen Linie bestehet. **

§. 8. Zeichnung 3.

Hauptmerkmahle der geraden Linie.

Ihr werdet unter den fünf Linien die gerade Linie unfehlbar herausfinden; denn jedermann weiß eine gerade Linie von allen krummen und zusammengesetzten Linien zu unterscheiden, und gebraucht dazu hauptsächlich folgende Merkmahle:

I. Zwischen zwey Puncten findet nur eine gerade Linie Statt:

II. Eine gerade Linie gehet beständig in einerley Richtung fort:

III. Die gerade Linie zwischen zwey Puncten ist kürzer als alle krumme Linien, die man zwischen denselben Puncten ziehen kann. Denn:

1) Wenn ihr die gerade Linie von A bis B einmahl gezogen habt, und ihr versucht es, durch eben dieselben zwey Puncte A und B noch einmahl eine gerade Linie zu ziehen: so wird entweder die zum zweyten Mahle gezogene Linie ganz genau in die schon vorhandene fallen; oder ihr werdet sogleich behaupten, daß wenigstens eine von beyden nicht gerade sey.

2) Ver-

2) Versucht es einmahl, aus freyer Hand eine gerade Linie von A bis B zu ziehen. Nicht wahr, ihr bemühet euch während des Ziehens, alle nach einander entstehenden Theile der geraden Linie beständig fort nach dem Puncte B hinzurichten, und weder zur Rechten noch zur Linken von dieser Richtung abzuweichen?

3) Wenn ihr auf dem kürzesten Wege zu einem entfernten Orte gelangen wollet, so suchet ihr gewiß in gerader Linie auf ihn zuzugehen.

** Anmerkung. Man kann das erste und dritte Merkmahl zusammenfassen und sagen: die gerade Linie ist die (eine) kürzeste von allen Linien, welche zwischen zwey Puncten Statt haben: nur muß man alsdann aus dieser Annahme nicht, wie es sehr gewöhnlich ist, das erste Merkmahl abzuleiten suchen. Wenn man die dabey vorkommenden Schlüsse genau betrachtet, so wird man finden, daß entweder der Schlußsatz selbst schon einer von den Prämissen ist, sobald diese richtig ausgedrückt und zergliedert werden; oder daß man doch schon ein Merkmahl mehr vorausgesetzt hat, als man glaubte und willens war. In ähnliche Täuschungen verfällt man überhaupt sehr leicht, so bald man aus einem andern der angegebnen

Merk-

Merkmahle die übrigen ableiten will. Indessen scheint es doch, daß diejenigen eine ziemlich nutzbare Erklärung der geraden Linie geben, welche das erste, oder ein ihm nahe kommendes Merkmahl dafür annehmen, wie der Herr Professor Klügel in seiner vortrefflichen Encyklopädie: Die gerade Linie ist diejenige, welche man nur auf eine einzige Art zwischen zwey Puncten sich gedenken kann. **

§. 9.

Practische Aufgabe.

Ein Lineal zu prüfen, ob es wirklich gerade Linien giebt.

§. 10.

Auflösung.

Ziehet dem Lineale gemäß eine, eurer Hoffnung nach, gerade Linie dicht über dem Lineale und überschlagt es um diese Linie dergestalt, daß das linke Ende des Lineales am linken Ende der Linie, das rechte Ende des Lineales am rechten Ende der Linie bleibt und die Linie nunmehr dicht unter dem Lineale zu liegen kommt. Wenn ihr nun sehet, daß eine zweyte Linie, die ihr in dieser Lage des Lineales demselben gemäß durch die beyden Endpuncte der schon vorhandenen Linie ziehen würdet, ganz

genau in die schon vorhandenen hineinfallen müste, so könnt ihr versichert seyn, daß das Lineal eine Linie gegeben hat, welche nach keiner Seite hin von der geraden Linie abweichet, die zwischen ihren beyden Endpuncten Statt findet.

§. 10.

Zusatz.

Wenn zwey richtige Lineale an einander gelegt oder auch aneinander verschoben werden; so müssen sie sich in allen Puncten berühren. Denn gesetzt, sie berührten sich in zwey Puncten, die A und B heissen mögen, ohne daß die dazwischen fallenden Theile beyder Lineale aneinander stiessen; so könnten beyde Lineale gewiß nicht die gerade Linie angeben, welche durch die beyden Puncte A und B geht, (§. 8, I.); sondern es müste wenigstens eines von beyden Linealen zwischen den Puncten A und B unrichtig seyn. Wenn ihr nun während des Verschiebens beyde Lineale gegen das Licht haltet; so könnt ihr leicht bemerken, ob und wo sie von einander abweichen.

§. 11.

Practische Anmerkung.

Mäurer, Zimmerleute und andere Handwerker brauchen oft gerade Linien zwischen zwey Punkten, die zu weit von einander entfernt liegen, als daß man feste Lineale zu ihrer Bespannung verfertigen könnte. Ihr wißt es schon, wie vortrefflich sie sich durch eine

straff-

straffgezogene biegsame Schnur zu helfen wissen. Bey den Messungen auf dem Felde gibt es noch ungleich längere gerade Linien zu bezeichnen, deren Endpuncte oft so weit von einander entfernt liegen, daß es an Schnüren fehlt, die lang genug wären, um sie beyde mit einem Mahle zu bespannen. Und wenn man auch diesem Mangel abhelfen könnte; so würde nicht nur keine menschliche Kraft hinreichen, sie straff genug anzuziehen, sondern sie würden auch durch ihre eigene Wucht zerreissen, ehe man sie noch in eine gerade Linie gezogen hätte. Runde Stäbe oder Stangen, die etwa anderthalb Zoll dick, 4 bis 7 Fuß hoch, und an der untern Spitze mit Eisen beschlagen sind, geben ein vortrefliches Hülfsmittel ab, dergleichen lange Linien in mehrere kleinere von beliebiger Größe zu zertheilen.

§. 12. Zeichnung. 1.

Praktische Aufgabe.

Auf einer durch ihre beyden Endpuncte A und B bestimmten geraden Linie mehrere beliebige Theile abzustecken.

§. 13.

Auflösung.

Wenn der eine Endpunkt F schon durch einen Baum oder auf eine bequeme Weise bezeichnet ist; so habt ihr nur noch bey dem andern

End-

Endpuncte A eine Stange einzustecken, die ihr, wie alle folgende Stangen, gerade, oder richtiger zu reden, senkrecht in den Erdboden einsteckt, das heißt, in derjenigen Richtung, worin ein schwerer Körper gegen die Erde herabfällt, oder auch einen biegsamen Faden straff niederzieht. Ihr erkennet diese Richtung bey einer Stange daran, daß sie sich auf keiner Seite stärker, als auf jeder andern gegen den Erdboden neiget.

Einer von euch soll visiren und Cajus heissen. Du Cajus stelle dich wenigstens 4 bis 5 Schritt vor den Stab A bey C dergestalt, daß deinem einen geöfneten Auge der Baum bey F, oder wenigstens seine Mitte, und besonders in seinen untern Theilen, von der Stange A verdeckt wird, und deute deinem Gehülfen Titius, der in der Gegend von B stehet, vermittelst deines Huthes an, ob er seine Stange näher an sich heran, oder weiter von sich abhalten müsse, und die Stelle zu treffen, wo sie dir weder zur Rechten noch zur Linken aus irgend einer geraden Linie abzuweichen scheinet, die du dir zwischen jedem Punkte der Stange und den verdeckten, vorzüglich den untern Theilen des Baumes F gedenken kannst. Sobald Titius diese Stelle getroffen hat, setze deinen Huth auf, zum Zeichen, daß Titius die Stange senk-

recht

recht einstecken soll. Eben so läßt du die folgenden Stangen bey D, E ꝛc. einstecken.

§. 14.

Anmerkung. Wenn ihr fortfahret, die Richtung der geraden Linie AF auch über ihren anfangs bestimmten Endpunkt F hinaus durch solche eingesteckte Stangen zu bemerken; so heißt das die gerade Linie AF über F hinaus verlängern.

§. 15.

Zusatz.

Wäre es nun eure Absicht, die gerade Linie AF in allen ihren Punkten genau zu bezeichnen; so hättet ihr die Stäbe so nahe bey einander einzustecken, daß ihr zwischen jeden zwey Stäben eine biegsame Schnur über die Erde hin straff anziehen könnet.

§. 16. Zeichnung 1.

Zusatz.

Ist es eure Absicht, die gerade Linie AF vermittelst einer Schnur oder Kette von einer schicklichen Länge zu messen; so werden die Stäbe ebenfalls nur darum nach und nach eingesteckt, damit ihr die Kette zu wiederholten Mahlen in gerader Linie einpassen und dadurch erfahren könnet, wie oft die Länge der Meßschnur oder Meßkette in der Weite AF enthalten sey.

Habt

Habt ihr dazu, ausser dem Cajus und Titius im §. 13. noch einen dritten Gehülfen Sempronius; so legt Sempronius den Anfangsring der Meßkette um die Stange in A, und Titius steckt dem Visiren des Cajus gemäß seine Stange bey B dergestalt ein, daß AB, wo nicht eben so lang, doch nicht viel kürzer wird, als die Länge der Meßkette, welche dicht neben die Stange bey B hin und straff angezogen von A bis β reichen kann.

In β steckt Titius einen kleinen Stock ein, der etwa eine Spanne lang seyn mag. Sobald das geschehen ist, faßt er das Ende der Meßkette, und ziehet auch die Stange bey B heraus. Sogleich hebt auch Sempronius seine Stange A nebst dem Anfangsringe der Meßkette auf und beyde tragen die Kette in grader Richtung fort, bis Sempronius bey dem Stocke β anlanget. Diesen Stock nimmt Sempronius zu sich, steckt an seine Stelle seine Stange mit dem Anfangsringe der Kette ein, und tritt alsdann auf die Seite, damit Cajus ungehindert visiren und Titius seine Stange bey D eben so wie vorher bey B einstecken kann. Titius bemerkt die Stelle wo das Ende der Meßkette hinfällt, wie vorher bey β durch einen kleinen Stock, den Titius nachher ebenfalls zu sich nimmt; und

so

so fort, bis man endlich den Punct F mit der Kette erreichen kann.

§. 17.

Anmerkung 1. Die Menge der Zeichenstöckchen bey α, β u. s. w., welche Titius eingesteckt, Sempronius aber aufgezogen und aufgesammelt hat, gibt am Ende der Messung an, wie viele Kettenschläge die ganze Weite AC enthält, d. h. wie oft die ganze Kette in der Linie AC gelegen hat. Wenn man beym Anfange der Messung dem Titius die Stöcke zuzählet, und am Ende damit vergleicht, wie viel Sempronius eingesammelt und Titius noch übrig hat; so ist es fast unmöglich, sich um einen ganzen Kettenschlag zu verzählen. Ein neues Mittel, auch bey sehr langen Messungen allem Irrthume vorzubeugen, bestehet darin, daß man dem Titius nicht etwa 20, 30 u. d. Stöcke in einem Haufen zuzählt, sondern einzelne Bündel von 10 Stöcken hingibt, und den zehnten Stock in jedem Bündel, ich meine denjenigen, welchen Titius unter allen zehen zuletzt einstecken soll, unter den übrigen auszeichnet. Titius muß alsdenn beym Einsammeln Acht geben, ob der ausgezeichnete Stock wirklich ein zehnter ist, oder ob man etwa ein Bündel unrichtig abgezählt hat. Läßt man nun alle die zehnten Stöcke bis zu Ende der ganzen Messung stecken; so kann man auch durch Ab-

schrei-

schreiten geschwind erfahren, wo etwan ein Kettenschlag zu wenig oder zu viel gezählt ist.

§. 18.

Anmerkung 2. Der Visirer Cajus kann entweder beständig fort aus seinem ersten Standpuncte vor der Stange bey A visiren; oder auch dem Sempronius in einiger Entfernung nachfolgen, besonders wenn die Linie sehr lang ist. Fehlt es an einem dritten Gehülfen, so kann Cajus zugleich des Sempronius Amt versehen, indem er jedesmal einige Schritte hinter seine Stange zurücktritt, so oft er sie statt eines ausgezogenen Stockes eingesteckt hat.

§. 19.

Anmerkung 3. In so wichtigen Puncten einer geraden Linie, als ihre beyden Endpuncte allemal sind, läßt man gerne während der ganzen Messung eine vorzüglich große Stange stecken, die man auch durch eine Meßfahne oder ein weisses Tuch, einen Strohwisch u. d. für weite Entfernungen kenntlich zu machen pflegt.

§. 20.

Anmerkung 4. Schlägt die Meßkette bey der letzten Anlage in C über den Endpunct C hinaus, so kann man an ihren kleinern Abtheilungen leicht abnehmen, wie viel von ihrem

rem letzten Schlage noch zur Linie AF gehört.

§. 21.

Vom Längenmaße.

Die einzelen Glieder in einer Meßkette halten gewöhnlich die Hälfte von der Länge, die man einen Schuh nennt, die aber in verschiedenen Ländern auch eine sehr verschiedene Größe hat. Das Rheinländische Maß ist indessen durch ganz Deutschland bekannt, und jeder vorzügliche Tischler oder Zimmermann pflegt auch den Rheinländischen Werkschuh neben dem in seinem Lande üblichen Werkschuhe zu führen.

Zeichnet euch etwa auf einem hölzernen Stäbchen eine gerade Linie, 5mahl so lang als AD in der 7ten Zeichnung; so habt ihr die Länge eines Rheinländischen geometrischen Schuhes, (nicht des Werkschuhes, wovon wir in der Folge reden werden). Macht euch ferner eine Schnur, die 10 solche Schuhe enthält; so habt ihr eine Rheinländische Ruthe. Bezeichnet euch durch Knoten die 10 einzelen Schuhe in dieser Ruthe, ziehet die Schnur nach einer geraden Linie, damit ihr die Länge einer Rheinländischen und in ihre 10 Schuh abgetheilten Ruthe deutlich übersehet. Dicht neben den ersten Schuh der ersten Ruthe legt euren

auf

auf Holz gezeichneten Schuh, nachdem ihr diesen in 10 gleiche Theile, das ist, in seine 10 Zoll, und den ersten Zoll davon wiederum in 10 gleiche Theile getheilt habt, die man gewöhnlich Linien, besser aber, wie die Handwerksleute, Striche nennt.

Wenn ihr dies alles vor Augen habt, so werdet ihr folgendes ganz deutlich übersehen.

§. 22.

Da jede Ruthe 10 Schuh, jeder Schuh 10 Zoll, und jeder Zoll 10 Striche hält; so muß jede Ruthe aus 100 Zollen d. i. zehnmal so viel Zollen als Schuhen; und ferner jede Ruthe aus 1000 Strichen, d. i. zehnmal so viel Strichen als Zollen bestehen.

Theilen wir endlich noch jeden Strich in 10 Scrupel; so muß eine jede Ruthe aus 10 mahl so viel Scrupeln als Strichen, folglich aus 10000 Scrupeln bestehen.

§. 23.

Umgekehrt müssen jede 10 Scrupel einen Strich,
und 10mal so viel oder 100 Scrupel einen Zoll,
u. wiederum 10mal so viel oder 1000 Scrupel einen Schuh,
u. wiederum 10mal so viel oder 10000 Scrupel eine Ruthe ausmachen.

§. 24.

Die Menge von 11111 (ich meine eilftausend einhundert und eilf) Scrupeln besteht demnach von der Rechten nach der Linken zu gelesen,

1) aus 1 Scrupel.

2) aus 10 Scrupeln oder 1 Strich.

3) aus 100 Scrupeln oder 10 Strichen oder 1 Zoll.

4) aus 1000 Scrupeln oder 100 Strichen oder 10 Zollen oder 1 Schuh.

5) aus 10000 Scrupeln oder 1000 Strichen oder 100 Zollen oder 10 Schuhen oder 1 Ruthe.

§. 25.

Man schreibt die Nahmen dieser Maße selten mit Buchstaben aus, sondern gebraucht dafür kürzere Bezeichnungen, die ihr sogleich verstehen werdet, als ihr wißt, daß man z. B. folgende Behauptung:

$11111'''' = 1^\circ\ 1'\ 1''\ 1'''\ 1''''$, zu lesen hat:

11111 Scrupel sind gleich, (oder bestehen aus) 1 Ruthe und 1 Schuh und 1 Zoll und 1 Strich und 1 Scrupel.

Eben so hättet ihr folgende Behauptung, $136849'''' = 13^{\circ}\ 6'\ 8''\ 4'''\ 9''''$, zu lesen:

136849 Scrupel enthalten 13 Ruthen 6 Schuh 8 Zoll 4 Strich und 9 Scrupel.

§. 26.

Wollte man die Behauptung im vorigen §. recht vollständig aussprechen, so würde man sagen: 136849 Scrupel enthalten 13 Ruthen und noch 6 Schuh und ferner noch 8 Zoll und 4 Linien und 9 Scrupel. Oft ist es nöthig, auf dieses und ganz besonders aufmerksam zu machen, und man pflegt es alsdann ebenfalls durch ein bequemes Zeichen + auszudrücken, welches eben daher das Plus-Zeichen (Und-Zeichen) genannt wird. Man schreibt alsdann:

$$136849'''' = 13^{\circ} + 6' + 8'' + 4''' + 9''''$$

und lieset diesen Satz, den man eine Gleichung nennt: 136849 Scrupel sind gleich 13 Ruthen nebst 6 Schuhen und 8 Zollen u. s. w.

§. 27.

Daß z. B. die Gleichung im vorigen §. wirklich richtig sey, werdet ihr übersehen, wenn ihr nach §. 23. bedenkt, daß 130000 d. i. 13 mahl 10000 Scrupel gerade 13 Ruthen, 6000 Scrupel gerade 6 Schuh, 800 Scrupel

gerade

gerade 8 Zoll und 40 Scrupel gerade 4 Strich geben müssen.

§. 28.

Vorzüglich aber rathe ich euch, dergleichen Reduktionen im Anfange nach folgenden Schlüssen zu unternehmen.

Da $136849'''' = 136840'''' + 9''''$ sind, und 136840 Scrupel gerade 10mahl so wenig, d. i. 13684 Striche geben; so müssen

$136849'''' = 13684''' + 9''''$ seyn.

Da nun ferner $13684''' = 13680''' + 4'''$ sind, und 13680 Striche gerade zehnmal weniger, d. i. 1368 Zolle geben; so müssen

$13684''' = 1368'' + 4'''$ seyn.

Vermittelst dieser Schlüsse werdet ihr nach und nach von der Richtigkeit folgender Gleichungen überzeugt werden.

Es sind

$136849'''' = 136840'''' + 9''''$ folglich $= 13684'''\,9'''' = 13680''' + 4''' + 9''''$ folglich $= 1368''\,4'''\,9'''' = 1360'' + 8'' + 4''' + 9''''$ folglich $= 136'\,8''\,4'''\,9'''' = 130' + 6' + 8''' + 4''' + 9'''$ folglich $13^{\circ}\,6'\,8''\,4'''\,9''''$

§. 29.

Eben so müssen $4056''' = 4^\circ\, 0'\, 5''\, 6''' = 4^\circ\, 5''\, 6'''$; ferner $190060''' = 19006'' = 190^\circ\, 0'\, 6'' = 190^\circ\, 6''$ seyn u. d. Umgekehrt müssen $19''8''' = 190''' + 8''' = 189'''$; desgleichen $14^\circ 8'' 3''' = 14000''' + 80''' + 3''' = 14083'''$ seyn u. d.

§. 30.

Vorbereitung. Wollte man die kleine Länge eines Striches wiederum unmittelbar in seine 10 Scrupel zertheilen, so würden die 10 Theilungspuncte zu nahe an einander fallen, und auch gute Augen durch ihre Abzählung sehr angegriffen werden. Diese Betrachtung lehrt die Vortreflichkeit einer solchen Abtheilung schäzen, als sie in dem Anfange der 7ten Zeichnung dargestellt ist, und auf dem Anfange der so genannten verjüngten Maßstäbe gefunden wird, den man im Allgemeinen besser ein Scrupelmaß oder einen Scrupelstab nennen würde, wie aus §. 35. erhellen wird.

§. 31. Zeichnung 7.

Verjüngter Maßstab oder Scrupelmaß.

Ueber FG sind 10 Querlinien gezogen, die einerley Entfernung von einander und zwischen sich halten, wie es die Zeichnung darstellt.

stellt. Die zur Linken von FA stehenden Ziffern bezeichnen die 2te, 4te, 6te und 8te von diesen Querlinien, deren 10te und oberste die Linie AC ist, welche eben sowohl als die ihr gleiche Linie FG in 10 gleiche Theile abgetheilt ist. BC ist ein solches Zehntel, folglich ein Strich, da AC gerade einen Rheinländischen Zoll hält.

Wenn nun, wie eben gesagt ist,

1) alle 10 Querlinien einerley und immer gleiche Entfernung von einander halten, und

2) BC, ein Theil der 10ten Querlinie, gerade 1 Strich oder 10 Scrupel hält; so werden die beyden geraden Linien GB und GC auf der 9ten Querlinie gerade 9 Scrupel auf der 8ten Querlinie 8 Scrupel, auf der 7ten, 6ten, 5ten, 4ten, 3ten und 2ten Querlinie gerade 7, 6, 5, 4, 3 und 2 Scrupel und endlich auf der 1sten über FG gezogenen Querlinie gerade 1 Scrupel abschneiden.

Warum die Linien GC und GB so erwünschte Theile abschneiden, kann euch nicht eher begreiflich gemacht werden, als bis ihr aus größern Geometrien die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke gründlich gefaßt habt. Für jetzt bemüht euch nur, den Gebrauch die-

ser

ser vortrefflichen Abtheilung aus folgenden Beyspielen zu lernen.

§. 32. Zeichnung 7.

Gebrauch des Scrupelmaßes.

1) In der 6ten Querlinie werdet ihr 2 vorzüglich stark gezeichnete Puncte bemerken: der eine von ihnen liegt zugleich in der geraden Linie DH. Die gerade Linie zwischen diesen beyden Puncten hält 1 Zoll (der zwischen den beyden Zoll = Linien CG und HD lieget) und 4 Strich, (welche die zwischen F und G stehende, und zur 4ten Strich= Linie gehörige 4 anzeiget) und endlich noch 6 Scrupel (weil auf der 6ten Querlinie zwischen den Puncten, wo sie von GB und GC geschnitten wird, noch 6 Scrupel enthalten sind).

Hieraus erhellet, wie man eine zwischen den Zirkelspitzen gefaßte Länge nach diesem Maßstabe abmessen kann. Wollt ihr umgekehrt

2) auf diesem Maßstabe eine Linie, z. B. von 1″ 8‴ 9⁗ abnehmen: so setzet die eine Zirkelspitze in die 9te Quer= oder Scrupel=Linie und zwar da ein, wo sie von der 8ten Strich= Linie durchschnitten wird, und bespan=

spannet von hier aus die 9te Querlinie bis dahin, wo sie von der 1ten Zoll-Linie AD durchschnitten wird. Ihr findet beyde Scheidungspuncte in der 2ten Zeichnung stark bemerkt, und der durch sie begrenzte Theil der 9ten Querlinie hält offenbar 1 Zoll 8 Striche und 9 Scrupel.

§. 33.

*Anmerkung 1. Wäre AC nur ein halber Zoll, folglich dessen Zehntel BC nur ein halber Strich; so würden eben die Theile nur 9, 8, 7 .... 2, 1 halbe Scrupel halten, welche jetzt 9, 8, 7 .... 2, 1 ganze Scrupel sind. Hingegen würden diese Theile eben so viel Doppelscrupel enthalten, so bald man der BC eine Länge von 2 Strichen gegeben hätte.

§. 39. Zeichnung 7.

* Anmerkung 2. Man verzeichnet einen Garten, eine Wiese, ein Haus u. d. nach einem 100mal verjüngten (verkleinerten) Maße, wenn man jede Linie, die in der Natur oder nach ordentlichem Maße z. B. eine Ruthe lang ist, auf dem Papiere, (d. h. überhaupt in der Zeichnung) nur einen Zoll lang macht, und von der Zeichnung dennoch so redet, als ob sie eben so viele Ruthen, Schuhe, Zolle enthalte, als das Ding, wovon sie doch eigentlich nur ein 100mahl verkleinertes Bild

dar-

darstellet. Jeder Zoll in der Zeichnung stellt alsdann eine Ruthe in der Natur vor, ob er gleich nur der 100te Theil von ihr ist und heißt in so fern eine 100mahl verjüngte Ruthe. In der nähmlichen Zeichnung muß alsdann, was eigentlich nach ordentlichem Maße ein Strich wäre, ebenfalls 100mahl mehr, also einen Schuh vorstellen, und heißt demnach ein 100 mahl verjüngter Schuh.

Wer einen Floh, eine Schneeflocke u. d. mit den kleinen Theilen abzeichnet, die man nur durch ein Vergrösserungsglas daran bemerken kann, der zeichnet nach keinem verjüngten, sondern nach einem vergrößerten Maße.

§. 35.

* Anmerkung 3. Sehr oft wählt man zur Vorstellung einer Ruthe oder eines Schuhes u. d. eine Länge blos danach, wie es die rathsame Größe der Zeichnung zu erfordern scheint, ohne sich darum zu bekümmern, wie oft dieses Bild der Ruthe in der eigentlichen Ruthe enthalten sey. Dann weiß man freylich nicht genau zu sagen, wie vielmahl das Maaß verjüngt sey: aber zu mancherley Gebrauch ist das nicht nöthig zu wissen; und die Zeichnung thut einerley Dienste, sie mag gerade 10, 100mahl u. d. oder sie mag 11, 99mahl u. d. verjüngt seyn.

§. 36.

§. 36.

* Anmerkung. 4. Die in §. 31 beschriebene und in Zeichnung 7. vorgestellte Abtheilungsart kann an und für sich selbst keinen Maßstab verjüngen. So lange man auf einem Maßstabe mit Zollen, Strichen und Scrupeln benennt, was wirklich Zolle, Striche und Scrupel sind, wie es bey dem abgezeichneten in §. 31. geschehen ist, und in diesem Buche ferner geschehen soll; so lange dient der vorhabende Maßstab nicht als ein verjüngtes Maß, wenn er gleich auf die beschriebene vortheilhafte Weise eingetheilt ist. So gebraucht man dergleichen vortheilhaft abgetheilte Maßstäbe wirklich zur unmittelbaren Messung der kleinen Körper: in den neuern Reißzeugen stellt man mit darum gerade wirkliche Zolle, Striche und Scrupel dar, um diesen Gebrauch zu befördern; und mit Anfängern sollte man die Maße schon lange bey ihren eigentlichen Namen genannt haben, ehe man zu ihrer Verjüngung übergeht. Daher ist es wol nicht ganz zu billigen, daß man alle kleine Maßstäbe in den Reißzeugen, sobald sie auf die angezeigte Weise eingetheilt sind, verjüngte Maßstäbe zu nennen pflegt.

§. 37.

Anmerkung. Die bisher betrachtete Abtheilung des Maßes, wonach aus einer Ruthe 10 Schuh, aus einem Schuhe 10 Zoll u. s. w. ent-

stehen, findet bey jeder Ruthe Statt, die in dem Lande eingeführt ist, wofür man ein solches Decimal-Maß verfertigen will. Ein Decimal-Schuh, Decimal-Zoll u. s. w. wird auch wohl der geometrische Schuh, der geometrische Zoll genannt; weil sich gerade die Feldmesser aus guten Gründen der Decimal-Abtheilung bedienen.

§. 38.

Vom Duodecimal-Maße.

Theilet man die nähmliche Ruthe, woraus der Geometer seine 10 Schuhe macht, nicht in 10, sondern in 12 (duodecim) Schuh, solchen Duodecimal-Schuh in 12 Zoll, solchen Duodecimal-Zoll in 12 Striche u. s. w; so erhält man das Duodecimal-Maß.

Dergleichen Duodecimal-Schuh heißt auch ein gemeiner oder Werkschuh, weil er im gemeinen Leben und in den Werkstätten der gewöhnlichste ist.

§. 39.

*Anmerkung. In manchen Ländern theilt man die Ruthe sogar in 15 oder 16 Schuh u. s. w. Will man in solchen Ländern nach dem Rheinländischen Schuhe etwas bestimmen; so muß man zuvor erforschen, ob die Handwerker

ker den gemeinen Rheinländischen Werkschuh, d. i. den Duodecimalschuh führen; oder ob ihr sogenannter Rheinländischer Schuh ebenfalls etwa der 15 oder 16te Theil von der Rheinländischen Ruthe ist. Der erste Fall mögte wol der gewöhnlichste seyn; weil die Handwerker von ihren Reisen nicht leicht eine Rheinländische Ruthe, sondern nur einen Rheinländischen Schuh in ihr Vaterland bringen. Der zweyte Fall könnte indessen auch entstanden seyn, wo man gerade eine Rheinländische Ruthe bey der Hand hatte, und etwan ein Sachverständiger diese Ruthe landesüblich abtheilte.

§. 40.

Zusatz.

Wie viel Zolle geben 8° und 11″, alles im Duodecimalmaße gerechnet? Man schliesse: 8 Ruthen geben 12mahl 8, d. i. 96. Schuh; diese 96 Schuh halten 12. 96 = 1152″ (leset 12 mahl 96, das ist 1152 Zoll) zu diesen 1152″ die 11″ hinzugerechnet gibt 1163″.

Wollt ihr umgekehrt z. B. die nähmlichen 1163 Zoll auf Schuhe und Ruthen reduciren; so müßt ihr darin durch 12 dividiren, um die daraus entstehende Anzahl von Schuhen zu erfahren, und in die erhaltenen 96 Schuh abermahl durch 12 dividiren, um die daraus entstehende Menge von Ruthen zu erfahren; denn 1163

Zoll

Zoll geben 12 mahl so wenig Schuhe, und diese 96 Schuh geben 12 mahl weniger Ruthen.

§. 41.

Anmerkung. Bey der Decimal-Abtheilung geht dergleichen Reduciren ungleich leichter von Statten, und eben dies ist der Grund, warum die Feldmesser die Decimal-Eintheilung gebrauchen, ** und die Mathematiker bey ihren Rechnungen bisweilen bloß in Gedanken voraussetzen und annehmen. Diese nehmen nähmlich öfters mit dem Arbeitsmann den gewöhnlichen Werkschuh an, und denken sich nun diesen Duodecimal-Schuh fernerhin in 10tel und 100tel u. s. w. abgetheilt; oder lassen gar, bey noch kleinern Dingen, ihre Decimal-Abtheilung erst bey dem Duodecimal-Zolle anfangen **). Gleichwohl thun die Handwerker ebenfalls recht, daß sie bey ihrem Duodecimal-Maße bleiben. Wenn 1 Schuh 12 Zoll hält; so kann man nicht nur die Hälfte, sondern auch das Drittheil und Viertheil vom Schuh in ganzen Zollen angeben. Wenn der Schuh aber 10 Zoll hat; so besteht z. B. sein Viertheil aus $2\frac{1}{2}$ Zoll. Dergleichen Brüche sind im gemeinen Leben unbequem; der Mathematiker aber hat keine Ursach, sich davor zu fürchten.

§. 42.

§. 42.

Anmerkung. Wenn ihr Statt der 10 Querlinien in der 7ten Zeichnung 12 solche Querlinien, ebenfalls in einerley und gleichbleibender Entfernung ziehet, und die BC einem Duodecimal-Striche gleich macht; so halten die über FG fallenden, von den geraden Linien GB und GC abgeschnittenen Theile der Querlinien 11, 10, 9, 8 . . . . . 3, 2, 1 Duodecimalscrupel.

§. 43.

Vergleichung des Decimal- und Duodecimal-Maßes.

Einerley Ruthe

hält 10 Decimal-Schuh und 12 Duodecimal-Schuh

hält 100 Decimal-Zoll und 144 Duodecimal-Zoll

hält 1000 Decimal-Strich und 1728 Duodecimal-Strich

hält 10000 Decimalscrupel und 20736 Duodecimalscrupel.

§. 44.

Sind nun 10 Decimal-Schuh = 12 Duodecimal-Schuh

so muß 1 Decimal-Schuh = $\frac{12}{10}$ = $\frac{6}{5}$ = $1\frac{1}{5}$ Duodecimal-Schuh

und eben so 1 Duodecimal-Zoll = $\frac{144}{100}$ = $1\frac{11}{25}$ Decimal-Zoll seyn ꝛc.

Umgekehrt: da 12 Duodecimal-Zoll = 10 Decimal-Schuh sind;

so muß 1 Duodecimal-Schuh = $\frac{10}{12}$ = $\frac{5}{6}$ Decimal-Schuh seyn.

Und nach ähnlichen Schlüssen

muß 1 Duodecimal-Zoll = $\frac{100}{144}$ = $\frac{25}{36}$ Decimal-Zoll seyn u. s. w.

§. 45.

Frage: 12° 8′ Decimal-Maß, wie viel geben die im Duodezimal-Maße? Antwort: die 12° 8′ geben 128 Decimal-Schuh. Da nun jeder einzele Decimal-Schuh gerade 1 $\frac{1}{5}$ Duodecimal-Schuh hält; §. 44.); so hat man

die Zahl 128 1) 1 mahl zu nehmen, gibt 128
und dann 2) noch $\frac{1}{5}$ mahl zu nehmen, = = $25\frac{3}{5}$
und beydes zusammengenommen, gibt $153\frac{3}{5}$ Duodezimal-Schuh.

An-

Anmerkung. Die $\frac{3}{5}$ Duodecimal-Schuh geben 12mahl so viel in Zollen, also $\frac{36}{5}$ d. i. $7\frac{1}{5}$ Duodezimal-Zoll

das $\frac{1}{5}$ Duodecimal-Zoll gibt wiederum 12mahl so viel in Strichen; also $\frac{12}{5}$ d. i. $2\frac{2}{5}$ Duodecimal-Strich.

§. 46.

Frage: 7′ 11″ Duodecimal-Maß, wie viel geben die im Decimal-Maße?

Antwort: die 7′ 11″ machen 95 Duodecimal-Zoll. Da nun jeder einzele von diesen Duodecimal-Zollen $\frac{25}{36}$ Decimal-Zoll hält; so müssen alle 59 zusammengenommen gerade 95mahl $\frac{25}{36}$ d. i. $\frac{2380}{36}$ d. i. $66\frac{1}{9}$ Decimal-Zoll halten.

Im Decimal-Maße hält nun dieses $\frac{1}{9}$ Zoll zehnmahl mehr in Strichen, folglich, $\frac{10}{9}$ d. i. $1\frac{1}{9}$ Strich, und $\frac{1}{9}$ Strich wieder $\frac{10}{9}$ Scrupel.

§. 47.

Vorbereitung. Zu den ersten Messungen wählt man gerne ein ziemlich ebnes Feld. Darunter versteht man ein Feld, das keine beträchtlichen Erhöhungen und Vertiefungen enthält, und auch selbst im Ganzen genommen, weder die Wölbung eines Berges, noch die Höhlung eines Thales ausmacht. Nur da, wo ein Feld ziem-

lich eben ist, kann man die Kette in einer hinlänglich richtigen geraden Linie niederlegen.

§. 48.

Glatt nennen wir einen Körper, wenn wir in den kleinsten uns bemerkbaren Theilen seiner Oberfläche keine Erhabenheiten oder Vertiefungen weder sehen noch fühlen können. Das Gegentheil von glatt ist rauh. Die Oberfläche eines Papieres, worauf man gerade Linien ziehen will, muß nothwendig glatt seyn: auf einer rauhen Oberfläche kann man keine gerade Linien ziehen. Aber es gibt viele glatte Oberflächen, worauf man doch keine einzige gerade Linie ziehen kann, z. B. die Oberfläche einer polirten Kugel, die äussere und innere Oberfläche der gekrümmten Glasscheiben an den Taschenuhren. Es gibt andere glatte Oberflächen, worauf man nur nach einigen Richtungen gerade Linien ziehen kann. Z. B. die äussere und innere Oberfläche an der Seitenwand der gewöhnlichen Biergläser, sind so beschaffen, daß man darauf von oben nach unten zu, und umgekehrt von unten nach oben zu, unzählig viele gerade Linien neben einander verzeichnen könnte. Alle übrige Linien aber, die man in irgend einer andern Richtung auf diesen Oberflächen verzeichnen wollte, würden allemahl krumm werden. Dagegen kann man auf der Oberfläche eines guten gewöhnlichen Spiegels, auf der

Ober=

Oberfläche eines richtig abgehobelten Reißbrettes nach allen Richtungen hin gerade Linien zeichnen. Ihr mögt in einer solchen Oberfläche zwey Puncte machen, wo ihr nur immer wollt: so wird die gerade Linie, welche von einem dieser Puncte zum andern führet, allenthalben in die Oberfläche selbst fallen, in keinem Theile nach oben oder nach unten zu von der Oberfläche abweichen.

§. 49.

Erklärung. Eine Oberfläche, worauf man nach allen Richtungen hin gerade Linien ziehen kann, heißt eine ebne Oberfläche, ist eine Ebne.

§. 50.

Anmerkung. Die Kupfertafeln am Ende dieses Buches müßt ihr jedesmal so aus einander legen, daß wenigstens die Zeichnung, wovon gerade die Rede ist, mit allen ihren Linien und Puncten in eine Ebne zu liegen kommt. Ich sage in eine und nicht in zwey Ebnen; wie es leicht geschehen könnte, wenn etwa eine zusammen gehörige Zeichnung von einem Falze im Blatte durchschnitten, und das Blatt nicht völlig aus einander geschlagen würde.

§. 51. Zeichnung 8.

Vorbereitung. Zwey gerade Linien AB und CD, die einander immer näher und näher kommen, haben ohne Zweifel eine Neigung gegen einander. Gehörig verlängert, stoßen solche Linien endlich in einem Puncte E zusammen und machen einen Winkel, der uns sogleich in die Augen fällt, als wir entweder die drey Buchstaben AEC, oder BED; oder auch nur den einen kleinen Buchstaben o aufgesucht haben.

§. 52. Zeichnung 9.

Erklärung. Ein Winkel ist eine Neigung zweyer Linien, die nur einen gemeinschaftlichen Punct haben. Dieser gemeinschaftliche Punct B heißt die Spitze (auch der Scheitel) des Winkels, und die beyden Linien, deren Neigung man betrachtet, werden seine Schenkel genannt.

** Anmerkung. Anfänger haben es mit keinen andern als geradelinigen Winkeln zu thun, d. h. deren Schenkel zwey gerade Linien sind. Dergleichen Winkel versteht man allemahl, wenn man schlechthin von einzelen Winkeln redet, und der krummlinigen Winkel sollte man bey Anfängern gar nicht erwähnen. Fallen sie von selbst darauf; so sage man ihnen,

daß

daß man bey solchen krummlinigen Winkeln, als die 42ste Zeichnung vorstellt, von den krummen Schenkeln a b und a d zwey ganz kleine Theile aβ und a δ, je kleiner je besser, allenfalls als gerade Linien betrachten könne. Bey einem krummlinigen Winkel können die beyden Schenkel eine solche Lage haben, daß man sich keine Ebene gedenken kann, worin man die beyden krummen Schenkel zugleich verzeichnen könnte. Z. B. Man falze die 24ste Zeichnung gerade durch den Punct b und zwischen die beyden krummen Schenkel hindurch, und neige die beyden durch die Falzung entstandenen Theile gegeneinander: so kann es gar keine Ebene geben, die nicht nur durch alle Puncte des Bogens aβb, sondern zugleich auch des Bogens aδd ginge; und dann hätten wir einen unebnen Winkel. Bey jedem geradelinigen Winkel aber kann man sich allemahl eine Ebne gedenken, die durch beyde Schenkel des Winkels geht. Jeder geradelinige Winkel kann also allemahl als ein ebner Winkel betrachtet werden, indem man sich z. B. bey dem Winkel A B C keine andere als diejenige ebne Oberfläche gedenkt, worin die beyden Schenkel B C und B A liegen. Sollten wir nähmlich auf die Vorstellung verfallen: durch welche Bewegung kann der Schenkel B C in die Lage des Schenkels B A kommen? so dürfen wir uns keine andre als eine solche Drehung dieser Linie B C um den

Punct B denken, wobey diese Linie beständig in der ebenen Oberfläche des Papieres bleibt. Sonst könnte man auch, z. B. einen in B C liegenden steifen Drath, der die gerade Linie B C vorstellen kann, in C aufheben, und ihn, indem er mit seinem andern Endpuncte in B ruhig liegen bleibt, dergestalt in die Lage B A drehen, daß der Endpunct C während dieser Drehung etwan einen halben Umkreis oder sonst eine andre krumme Linie beschriebe. Dergleichen Bewegungen zu Entstehung der verschiednen Lagen, welche die Schenkel der Winkel haben, sollen ohne Zweifel abgesondert werden, wenn man von einem geradelinigen Winkel sagt, daß er ein ebner Winkel sey; und in so fern ist es kein Ueberfluß im Ausdrucke, kein Verstoß wider die Nettigkeit des geometrischen Vortrages, wenn man von geradelinigen und ebenen Winkeln spricht, ob man gleich in strengen Systemen diese Zusammenfügung vermeiden kann; es sey dann, daß man eine solche drehende Bewegung bey der geometrischen Erklärung eines Winkels zum Grunde legt. Den ersten jugendlichen Anfängern muß man, unserer Meinung nach, noch nicht vorerzählen, auf wie mancherley Weise sie sich Vorstellungen machen könnten, die man alle jetzt eben nicht haben will; wenn sie ganz natürlicher Weise von selbst nur auf die eine Vorstellung verfallen, die man gerade gebraucht. Wo sollte sonst

zu den Lehrstunden Zeit, und zu den Lehrbüchern Papier genug herkommen. * *

§. 53.

Zeichnung 12. 11. 10.

Vorbereitung. Zwey Seiten an einem nach geraden Linien beschnittenen dünnen Papiere können einen Winkel vorstellen. Schneidet euch einen Winkel, wie $\alpha\,\beta\,\delta$ in der 12ten Zeichnung, aus Papier. Könnet ihr diesen ausgeschnittenen Winkel in einen andern gezeichneten Winkel A B D, Zeichn. 11. dergestalt einpassen, wie es in der 10ten Zeichnung vorgestellt ist; daß nähmlich auch der Schenkel $\beta\,\alpha$ längst B A, d. h. in die Lage des Schenkels B A fällt, nachdem ihr die Linie $\beta\,\delta$ auf die Lage von B und den Punct β gerade auf den Punct B gelegt habt: so sagt man, daß die beyden Winkel $\alpha\,\beta\,\delta$ und A B D einander decken; wenn gleich die beyden Endpuncte der Schenkel α und A, desgleichen δ und D nicht auf einander fallen, folglich die $\beta\,\alpha$ und B A, desgleichen $\beta\,\delta$ und B D einander nicht decken.

§. 54.

Erklärung. Zwey Winkel können einander decken (oder auf einander passen), wenn man sie beyde dergestalt über einander legen

kann,

kann, daß ihre Spitzen und die Lagen ihrer beyden Schenkel auf einander fallen.

§. 55.

Grundsatz. Jede zwey Winkel die einander decken (auf einander passen) können, sind einander gleich.

§. 56.

Zeichnung 17. 16. 15.

Erklärung. Der Winkel $\alpha\beta\delta$, Zeichnung 17. heißt kleiner als der Winkel A B D Zeichnung 16.; weil er mit seiner Spitze und dem einen Schenkel auf die Spitze und den einen Schenkel des Winkels ABD so auf- und eingelegt werden kann, (siehe die 15te Zeichnung) daß er innerhalb dem Winkel ABD Platz findet.

Der Winkel ABD heißt mit Recht größer als $\alpha\beta\delta$; weil er bey solcher Lage den Winkel $\alpha\beta\delta$ in sich fassen kann. Der Winkel ABD ist offenbar um den Winkel x größer, als der Winkel $\alpha\beta\delta$.

Es ist $\angle\, \alpha\beta\delta + \angle\, x = \angle\, ABD$, d. h. beyde, der Winkel $\alpha\beta\delta$ und der Winkel x zusammen genommen und in eins gerechnet, geben einen Winkel, der dem Winkel ABD gleich ist.

§. 57.

Zusatz. Zwey Winkel, die nicht in einander passen, einander nicht decken können, sind einander nicht gleich.

§. 58.

Folgerung. Zwey Winkel die einander gleich seyn sollen, müssen auch einander decken können. Denn sollten sie einander nicht decken können, so könnten sie ja nach §. 57. einander nicht gleich seyn.

§. 59. Zeichnung 10.

Anmerk. Ein Winkel bleibt so groß als er einmahl ist, man mag seine Schenkel verlängern oder verkürzen, so viel man will. Denn die Größe eines Winkels besteht in der Größe der Neigung, die seine beyden Schenkel gegeneinander haben; und die Neigung zwischen den beyden kurzen Schenkeln B α und B δ ist ohne Zweifel eben so groß als die Neigung zwischen den beyden längern Schenkeln B A und B D.

§. 60. Zeichnung 13.

Vorbereitung. Haltet die eine Spitze eures nach Belieben geöffneten Zirkels (des Instrumentes) in C und führet dabey die andere Zirkelspitze in der um den Punct C herumliegenden ebnen Oberfläche dergestalt herum, daß sie

bey

bey unverrückter Oeffnung des Zirkels eine zusammenhängende Linie beschreibt. Diese krumme Linie werdet ihr vielleicht einen Cirkel nennen: aber wenn ein Mathematiker diese Zeichnung einen Cirkel oder Kreis nennt; so denkt er sich bey dieser Zeichnung nicht bloß die beschriebene krumme Linie, sondern zugleich auch das Stück der ebnen Oberfläche, welches diese krumme Linie begrenzt (umschließt) und aus der übrigen Oberfläche des Papieres absondert. Wir unterscheiden also künftighin bey jedem Cirkel 1) die Fläche des Cirkels, und 2) die krumme Linie, welche die Grenze dieses Flächenraumes abgibt, und die Peripherie genannt wird.

Anmerkung 1. Gleichbedeutende Nahmen sind Cirkel und Kreis: Cirkelfläche und Kreisfläche: Peripherie, Zirkel-Linie, Umkreis, des Kreises Umfang und Kreislinie.

Anmerkung 2. In §. 60. sind die Nahmen des Instrumentes und der Figur, Zirkel und Cirkel, durch die Schreibart unterschieden. Da aber Herr Adelung dergleichen Unterscheidungen aus guten Gründen verwirft; so wollen wir künftighin das Wort Zirkel für das Instrument allein behalten, indem wir die Figur durch Kreis benennen. Dadurch wird auch beym mündlichen Unterrichte aller Verwirrung vor-

gebeuget.

gebeuget. Daß diese Absicht bey den Unterscheidungen durch verschiedene aber gleichlautende Buchstaben nicht erreicht wird, ist vielleicht eine Hauptursache, warum man sie sogleich für zweckloß und ungereimt erkennet.

§. 61. Zeichnung 13.

Erklärung. Die Kreislinie ist eine zusammen hängende Linie, deren Puncte alle in einer Ebene liegen und von einem gewissen Puncte C in derselben Ebene gleich weit entfernt sind. Dieser Punct C heißt des Kreises Mittelpunct.

§. 62. Zeichnung 13.

Erklärung. Jede gerade Linie die man zwischen dem Mittelpuncte eines Kreises und einem beliebigen Puncte seines Umfanges ziehet, heißt ein Radius. Folglich sind alle Radii eines Kreises, z. B. C A und C B, gleich groß.

§. 63. Zeichnung 14.

Jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunct des Kreises geht, und auf beyden Seiten durch den Umkreis begränzt wird, heißt ein Diameter des Kreises.

Alle Diameter eines Kreises müssen einander gleich seyn; weil jeder von ihnen, z. B. A B und D E aus zweyen Radiis besteht.

Anmer-

Anmerkung. Diameter wird auf deutsch ein Durchmesser, und jeder Radius als die Hälfte davon, ein Halbmesser des Kreises genannt.

§. 64.

Zugestandn. Satz. Ihr gesteht mir gern zu, daß ein Kreis durch jeden Diameter in zwey gleiche Theile, in zwey Hälften oder Halbkreise zertheilt wird.

Denn wenn ihr euch einen Kreis aus Papier schneidet und ihn nach der Richtung eines beliebigen Diameters falzet; so werden beyde Theile einander dergestalt bedecken, dergestalt auf einander passen, daß ihr von der völligen Gleichheit ihrer Flächen und deren Grenzlinien hinlänglich überzeugt werdet.

§. 65. Zeichnung 20.

Erklärung. Jeder Theil einer Kreislinie heißt ein Bogen, z. B. m n l; und jede gerade Linie zwischen zwey Puncten eines Umkreises, z. B. m l heißt eine Sehne.

§. 66. Zeichnung 20.

Erklärung. Eines Bogens m n l Mittelpunct heißt nicht etwa der Punct, wo der ganze Bogen halbirt wird, sondern derjenige C, welcher von allen Puncten die man sich im Bogen

selbst

selbst gedenken kann, gleich weit entfernt liegt. Der Mittelpunct der ganzen Kreislinie, woraus der Bogen ein Theil ist, ist demnach auch der zu dem Bogen gehörige Mittelpunct.

§. 67. Zeichnung 18.

Vorbereitung. In der 18ten Zeichnung fallen euch sogleich 36 gleiche Winkel in die Augen, welche insgesammt nebeneinander und um einen Punct herum liegen, ich meine, wovon jede zwey nächsten Winkel einen Schenkel gemein haben und deren Spitzen sämmtlich in einen einzigen Punct C fallen. Ihr werdet mir nicht nur zugeben, daß es wirklich dergleichen 36 einander gleiche Winkel um einen Punct herum geben kann; sondern daß man sich auch jeden dieser Winkel wiederum in 10 gleiche Winkel zertheilt vorstellen, und es folglich um den Punct C herum auch 360 einander gleiche Winkel geben kann.

§. 68.

Erklärung. Ein Winkel der so groß ist, daß er 360 mal um einen Punct herum gelegt und neben einander eingepaßt werden kann, heißt ein Gradwinkel.

§. 69.

Zugest. Satz. Alle Gradwinkel sind einander gleich.

Erläu-

Erläuterung. Ich meine nicht nur diejenigen, die um einen und eben denselben Punct entstehen, indem man aus diesem Puncte 360 Linien ziehet, welche 360 gleiche Winkel darstellen; sondern auch solche zwey Gradwinkel, die an verschiedenen Puncten entstanden sind, müssen einander gleich seyn. Oder: Ein Winkel, der um irgend einen Punct in einer ebenen Oberfläche 360 mahl neben einander herum gelegt und eingepaßt werden kann, kann auch um jeden andern Punct in einer beliebigen ebenen Oberfläche ebenfalls 360 mahl neben einander herumgelegt und eingepaßt werden.

§. 70. Zeichnung 18.

Zugest. Sätze. I) Die Schenkel von den 360 um einen Punct herumliegenden Gradwinkeln theilen einen jeden aus ihrer gemeinschaftlichen Spitze beschriebenen Umkreis in 360 gleiche Bogen (eben so wie die 36 gezeichneten Winkel jeden um ihre Spitze beschriebnen Umkreis in 36 gleiche Bogen zertheilen), und umgekehrt: II) Wenn man einen beliebigen Umkreis in 360 gleiche Bogen abtheilet und aus den 360 bezeichneten Theilungspuncten eben so viele grade Linien nach dem Mittelpuncte des Umkreises ziehet; so entstehen um den Mittelpunct herum 360 einander gleiche, folglich 360 Gradwinkel.

§. 71. Zeichnung 20.

* Anmerkung. Man kann überhaupt erweisen: 1) Zwey Bogen α β und AB aus einerley oder aus gleich großen Umkreisen, müssen einander gleich seyn; wenn die beyden Winkel am Mittelpuncte o und x, von deren Schenkeln sie bespannt werden, einander gleich sind, und umgekehrt: 2) Die beyden Winkel o und x welche am Mittelpuncte der beyden Bogen α β und A B liegen, und die beyden Bogen bespannen, müssen einander gleich seyn, sobald die Bogen α β und A B einander gleich sind.

Denn 1) wenn o = x; so kann man sich den Ausschnitt α C β auf den Ausschnitt A C B dergestalt gelegt vorstellen, daß die ganzen Ausschnitte und nahmentlich auch die Bogen α β und A B in allen ihren Puncten auf einander passen. Solche Bogen aber, die in allen ihren Puncten auf einander passen, sind einander gleich. Wenn umgekehrt 2) die Bogen α β und A B gleich sind, so müssen sie mit allen ihren Puncten auf einander gepaßt werden können; und wenn das geschieht, so müssen offenbar auch ihre Mittelpuncte (§. 66.) auf einander fallen: folglich die beyden ihnen zugehörigen Winkel o und x an ihrem Mittelpuncte einander decken und gleich seyn.

§. 72.

Erklärung. Ein Bogen, welcher den 360sten Theil des Umkreises ausmacht, woraus er ein Stück ist, heißt ein Grad: der Umkreis mag so groß oder so klein seyn als er will.

§. 73. Zeichnung 22.

Practischer Satz. Um demnach von einem verzeichneten Winkel A C B zu erfahren, wie vielmahl dieser Winkel größer sey, als ein Gradwinkel; so könnte man aus dieses Winkels Spitze C einen Umkreis beschreiben, diesen Umkreis in seine 360 Grade zertheilen und die Menge von Graden abzählen, die in dem Bogen A B enthalten sind, welchen der verzeichnete Winkel mit seinen Schenkeln bespannet.

§. 74.

Zusatz. Indessen sehr ihr leicht ein, daß es zur Messung des Winkels A C B hinreichend ist, wenn ihr auch nicht den ganzen Umkreis in seine 360, sondern nur den halben Umkreis A B D in seine 180 Grad zertheilet. Das wäre weniger mühsam, aber doch immer noch sehr beschwerlich. Anstatt daß man sich für jeden zu messenden Winkel einen besondern halben Umkreis beschreibet und in seine 180 Grade zertheilet, gebraucht man lieber einen Transporteur, ein Instrument woran sich ein halber

Um-

Umkreis befindet, der ein vor allemahl in seine 180 Grad zertheilt ist.

§. 75. Zeichnung 19.
Gebrauch des Transporteurs.

An einen Winkel A C B, dessen Grade man messen will, legt man dieses Instrument dergestalt an, daß seines halben Umkreises Radius CB ganz genau auf einen beliebigen Schenkel, z. B. auf C B, und seines halben Umkreises Mittelpunct ganz genau auf die Spitze C fällt, wie es die 19te Zeichnung vorstellet. Der Bogen am Transporteur, welcher von dem Winkel ACB bespannt wird, fängt bey B an und endigt sich bey A, und hält 110 Grad. Hingegen hält der Winkel DCA, der bey D anfängt und sich bey A endigt, gerade 70 Grad. Der Schenkel CA deutet nun freylich auf beyde Zahlen am Transporteur, sowohl auf 110 als auf 70; indessen siehet man aus diesem einen Beyspiele sogleich, nach welcher Zahl man sich jedesmahl zu richten habe.

§. 76. Zeichnung 21.

Anmerkung 1. Die verschiedene Größe der Transporteurs und ihrer halben Umkreise ändert in der Messung eines Winkels nichts; weil ein jeder Winkel wie x sowohl auf dem kleinen als auf dem größern punctirten Umkreise eben so viele Gradbogen als auf dem mittlern

bespan-

bespannen muß. Denn wenn z. B. der Bogen A B, den der Winkel x auf dem mittlern Umkreise bespannet, 77 Grad, das ist 77 dreyhundert- und sechzigstel des Umkreises hält; so haben in dem Winkel x (nach §. 70. II.) auch 77 Gradwinkel Platz. Diese 77 Gradwinkel müssen nun aber (nach §. 70. I.) auf jedem um ihren Mittelpunct beschriebenen Umkreise 77 dreyhundert- und sechzigstel des Umkreises, oder 77 Grad bespannen.

Zu eurer Uebung könnt ihr in diesen Schlüssen Statt 77 verschiedene andere Zahlen setzen, so werdet ihr sehen, daß dieselben Schlüsse für jede andere Zahl gelten.

§. 77. Zeichnung 21.

Anmerkung 2. Folgender Satz: der Bogen A B ist = 77°, wird gelesen: der Bogen A B ist gleich 77 Grad, und das Zeichen (°) bedeutet darin allerdings einen Bogen, einen Gradbogen, der den 360sten Theil seines Umkreises ausmacht. Sobald ich aber schreibe, der Winkel A C B ist = 77°, oder sobald ich behaupte, daß eine Menge von diesen durch (°) bezeichneten Größen einem Winkel gleich sey: so bedeutet das Zeichen (°) ebenfalls einen Winkel und zwar einen Gradwinkel. Ihr habt demnach solche Gleichungen, wie ∠ A C B = 77° zu lesen: der Winkel

A C B ist gleich 77 Gradwinkeln, das heißt, in dem Winkel A C B haben 77 Winkel von einem Grade Platz; er kann als die Summe von 77 Gradwinkeln betrachtet werden; er ist 77 mal größer als ein Winkel, der nur einen Grad bespannt.

Wenn ihr nicht mehr in Gefahr seyd, etwas anders dabey zu denken, als ich eben gesagt habe, so könnt ihr auch gar wohl lesen: der Winkel A C B enthält 77 Grad. Niemahls aber müßt ihr sagen: der Winkel A C B ist gleich 77 Grad. Denn ein Grad ist ein Theil eines Umkreises, und 77 dergleichen Theile an einander gesetzt, können wohl einen 77 mal größern Theil des Umkreises, nie aber einen Winkel ACB, eine Neigung zweyer geraden Linien hervorbringen.

Die Grade dienen nur zum Maße der Winkel eben so wie z. B. im gemeinen Leben die Stunden als ein Maß der Entfernungen gebraucht werden.

§. 78.

Fortsetzung. Wenn ich sage: mein Garten liegt zwey Stunden von hier; so soll das nicht heissen, der Weg von hier bis zu meinem Garten ist zwey Stunden, oder ist zweymahl so groß als eine Stunde: sondern er, der Weg nach meinem Garten ist zweymahl so

groß als ein Weg, den man in einer Stunde zurücklegen kann. Die zwey Stunden werden nur durch Beziehung auf diejenige Entfernung, die in einer Stunde zurückgelegt wird, und in der Entfernung meines Gartens wirklich zweymal enthalten seyn kann, zum Maße für die Entfernung meines Gartens gebraucht.

Und wenn ich sage, der Winkel x hält 2 Grad; so soll das nicht heissen, der Winkel x ist zwey Grad, oder ist zweymahl so groß als ein Grad: sondern er, der Winkel x, ist zweymahl so groß als ein Winkel, der nur einen Grad bespannet. Die 2 Grad können nur durch Beziehung auf denjenigen Winkel der einen Grad bespannt, und der im Winkel x wirklich zweymahl enthalten seyn kann, zum Maße des Winkels x gebraucht werden.

§. 79.

Erklärung. Ein Grad hält 60 Minuten, eine Minute hält 60 Secunden, und eine Secunde hält 60 Tertien.

§. 80.

Erläuterung. Wenn der Bogen, welchen ein Winkel an dessen Mittelpuncte bespannet, nicht aus lauter ganzen Graden besteht, z. B. mehr als 77° und doch nicht volle 78° hält; so gibt man den Ueberschuß über die

gan=

ganzen Grade nicht nur durch die Hälften oder Viertheile, sondern noch gewöhnlicher durch die 60stel eines Grades an. Ein kleiner Bogen, der den 60sten Theil eines Grades ausmacht, heißt eine Minute. An den messingenen Transporteurs, die man zu den Zeichnungen auf dem Papiere gebraucht, kann man wohl nicht viel kleinere Theile, als Hälften und höchstens Viertheile eines Grades, oder Bogen von 30 und 15 Minuten unterscheiden, und nur durch besondere Einrichtungen, die von ihren Erfindern Nonius und Vernier den Nahmen führen, kann man an etwas größern zum Feldmessen gebrauchten Winkelmessern auch Bogen von sehr wenigen Minuten abmessen lernen. Indessen müßt ihr es hier schon vorläufig merken, daß man sich einen Grad in 60 gleiche Bogen zertheilt vorstellet, die man Minuten nennt, und daß man sich ferner eine jede Minute in 60 Secunden und eine Secunde in 60 Tertien abgetheilt vorstellen kann.

§. 81. Zusatz.

Folgender Satz, der Bogen AB ist $= 18^\circ\ 19'\ 12''\ 59'''$, wird gelesen: der Bogen AB ist gleich oder besteht aus 18 Graden, 19 Minuten, 12 Secunden und 59 Tertien; und man versteht alsdann unter 19 Minuten 19 kleine Bogen, wovon ein jeder der 60ste Theil eines Gradbogens ist u. s. w. Folgenden Satz aber, der

Winkel ACB ist = 18° 19′ 12″ 59‴, hätte man dagegen zu lesen: der Winkel ACB besteht aus 18 Gradwinkeln und aus 19 Minuten- und aus 12 Secunden- und aus 59 Tertien-Winkeln.

§. 82. Zeichnung 25.

Vorbereitung. Wenn man eines Winkels x einen Schenkel BC verlängert, so entsteht zwischen der Verlängerung CA und dem andern Schenkel CD des Winkels x ein Winkel o, welcher neben dem Winkel x liegt, und der Nebenwinkel von x heißt. Umgekehrt heißt auch x mit eben dem Rechte der Nebenwinkel von o, weil durch Verlängerung des Schenkels A C der Winkel x neben dem Winkel o eben so entstehen würde, als o neben x entstand.

§. 83. Zeichnung 25.

Erklärungen. Zwey Winkel o und x die nur einen Schenkel C D gemein haben, und deren beyde übrigen Schenkel C A und C B in einer geraden Linie A B liegen, heissen Nebenwinkel.

Zeichnung 26.

Wenn der gemeinschaftliche Schenkel so liegt, daß beyde Nebenwinkel einander gleich werden, wie n und m; so steht der gemeinschaftliche Schenkel D C auf jeden der beyden übri-

übrigen Schenkel, auf CA und auf CB, und auch auf die ganze Linie AB normal (senkrecht, lothrecht, perpendiculair) und jeder von den beyden Winkeln n und m heißt ein rechter Winkel.

Zeichnung 25.

Ein Winkel wie x, der kleiner ist als ein rechter Winkel, heißt spitz, und stumpf heißt jeder Winkel wie o, der größer ist als ein rechter Winkel.

§. 84. Zeichnung 23.

* Anmerkung. Senkrecht, lothrecht, perpendiculair zu sagen, ist gewöhnlicher als normal. Aber wenn man jene Benennungen gebrauchen will, so muß man der Verwirrung vorbeugen, die bey Anfängern dadurch entsteht, daß alle diese Wörter von den Geometern in einem weitern Sinne genommen werden, als es im gemeinen Leben oder auch wohl in der Physik und Astronomie u. dergl. gewöhnlich ist. In der ursprünglichen und engern Bedeutung heißen nähmlich senkrecht und lothrecht diejenigen geraden Linien, worin sich ein freyfallender Körper gegen die Oberfläche der Erde senkt, worin der biegsame Faden DK an der Lothwage der Tischler von einer Bleykugel straff gezogen wird.

Man denke sich, daß dergleichen lothrechte Linie auf eine horizontale, wagerechte Ebne, z. B. auf

auf die Oberfläche eines ruhigen Wassers in einem weiten Gefäße treffe, und aus dem Puncte wo sie auftrift, beliebige gerade Linien in der Oberfläche des Wassers gezogen werden; so würde die lothrechte Linie mit einer jeden von diesen beliebigen Horizontallinien einen rechten Winkel machen, und nach §. 83. könnte man sagen, daß solche lothrechte Linie, in der engern Bedeutung, auf alle diese beliebigen Horizontallinien normal stehe.

Mehrere Verfasser von kleinen Geometrien haben diese Begriffe von senkrecht und lothrecht wirklich nur so enge gefaßt, daß sie die eine von jeden zwey Linien, welche unter einem rechten Winkel zusammenstoßen, mit dem Nahmen einer Horizontallinie belegen wollen. Um einen rechten Begriff von den geometrisch senkrechten oder normalen Linien bey Anfängern zu bewirken, wird es rathsam seyn, die Linie, worauf man eine Normallinie ziehen will, bald in dieser bald in jener Lage zu zeichnen. Oder man nehme eine Lothwage (s. d. 23. Zeichnung) und zeige ihnen, daß die darauf gezeichnete Linie DC auf des untern Lineales Schärfe AB beständig normal bleibt, wenn sie gleich von dem Faden des Bleylothes Dk abweicht, folglich nicht in der Schwerlinie liegt, nicht auf jede Horizontallinie normal steht.

§. 85.

§. 85. Zeichnung 22.

Zugestandener Satz.

Jede zwey Nebenwinkel BCA und BCD enthalten zusammen genommen 180 Gradwinkel.

Denn wenn man aus ihrer gemeinschaftlichen Spitze C einen Umkreis beschreibt; so wird dieser Umkreis durch die gerade Linie AD in zwey gleiche Theile zertheilt. Die beyden Nebenwinkel BCA und BCD bespannen also zusammengenommen die 180 Grade des Halbkreises ABD und enthalten demnach 180 Gradwinkel. §. 70. II.

§. 86.

Zusatz 1.

Jeder rechte Winkel muß die Hälfte von 180, also 90 Gradwinkel, jeder spitze Winkel weniger, und jeder stumpfe Winkel mehr als 90 Gradwinkel enthalten. §. 83.

§. 87.

Zusatz 2.

Wenn Statt der zwey Nebenwinkel, x und o in der 25sten Zeichnung oder DCB und BCA der 22 Zeichnung, auch mehrere Winkel an einem

nem Puncte und an der einen Seite einer ge-
raden Linie liegen: so enthalten alle diese Win-
kel zusammen genommen ebenfalls 180 Gra-
winkel, z. B. die drey Winkel x, c und
in der 52sten Zeichnung. Denn es läßt s
um solche 3 Winkel ebenfalls ein halber Umkr
beschreiben.

§. 88. Zeichnung 27.

Vorbereitung. Wenn man eines beli-
gen Winkels x beyde Schenkel AC und B
über ihren Schneidungspunct C hinaus verlän-
gert, daß sowohl ACα als BCβ eine gera
Linie wird; so entsteht zwischen den beyden Ve
längerungen Cα und Cβ ein Winkel y. E
heißt der Scheitelwinkel von x, und umgekehr
heißt auch x der Scheitelwinkel von y. Ma
kann sich vorstellen, daß beyde Winkel x un
y ihre Scheitel (vertices) gerade gegen einan-
der kehren und deshalb den Nahmen der Schei-
tel= (oder Vertikal=) Winkel führen.

§. 99. Zeichnung 27.

Erklärung. Zwey Winkel x und y
heissen Scheitelwinkel, wenn die Schenkel des
einen die verlängerten Schenkel des andern
sind.

Anmerkung. o und BCα sind demnach
ebenfalls ein Paar Scheitelwinkel.

§. 100.

§. 100.

Lehrsatz.

Alle Scheitelwinkel, z. B. x und y, sind einander gleich.

§. 101.

Kurze Uebersicht des Beweises.

o und x zusammengenommen halten 180° (§. 85); o und y zusammen genommen halten ebenfalls 180°: folglich muß y eben so viel Gradwinkel halten als x.

§. 102.

Auseinandergesetzter Lehrsatz.

Wenn x und y Scheitelwinkel sind, das heißt (nach §. 99)

wenn 1) ACα eine gerade Linie, und
2) BCβ eine gerade Linie ist;

so ———————

muß x = y seyn.

§. 103.

Auseinandergesetzter Beweis.

Da x+o=180°; Wegen der 2ten Bedingung im Lehrsatze und nach §. 85.

u. auch y+o=180°; Wegen der 1sten Bedingung im Lehrsatze und nach §. 85

———————

so muß x+o=y+o seyn.

muß $x + o = y + o$ seyn.

Da nun $- o = - o$ ist, d. h. Da nun der Abzug o auf der linken Seite der Gleichung gleich ist dem Abzuge o auf der rechten Seite: da ich auf der linken Seite eben so viel wegnehme, als von der rechten Seite, wenn ich beyde Seiten um den Winkel o vermindere: so muß, was auf der linken Seite übrig bleibt, der Winkel x, gleich seyn dem Reste auf der rechten Seite, dem Winkel y.

so ———————————

muß $x = y$ seyn.

§. 104.

Grundsatz.

Zwey Größen, die einer dritten gleich sind, sind einander selbst gleich.

§. 105.

Erläuterung. Ihr gabt mir im vorigen Beweise §. 103. ohne Bedenken zu, daß $x + o = y + o$, oder daß die zwey Winkelgrößen, $x + o$ die eine, und $y + o$ die andere, einander selbst gleich seyn müssen; so bald ihr übersehen hattet, daß jede von diesen Winkelgrößen einer und eben derselben dritten Winkelgröße, nähmlich der Summe von 180 Gradwinkeln gleich war.

Warum

Warum werdet ihr in §. 62 so leicht überzeugt, daß jede zwey Radii in einem Kreise ein ander gleich seyn müssen? — Weil ihr aus der Entstehung des Umkreises sogleich übersehet, daß so wohl der eine als der andere Radius gleich ist einer und eben derselben dritten Größe, nähmlich der Entfernung zwischen den beyden Zirkelspitzen.

Bey jeder einzelen euch verständlichen Anwendung seyd ihr und jedermann von der Wahrheit des in §. 104. allgemein ausgedrückten Satzes überzeugt, und es gibt keine andere Sätze, deren Wahrheit noch einleuchtender wäre, und woraus man eben diesen Satz als eine Folgerung herleiten könnte: darum heißt er ein Grundsatz. Wer mehrere aus dem gemeinen Leben hergenommene Erläuterungen darüber verlangt, kann etwa meinen ersten Unterricht in der Algebra 1. Band. §. 43. nachsehen.

§. 106.

Grundsatz.

Gleiches von gleichem abgezogen, gibt gleiche Reste. d. h. wenn von zwey Größen, die einander selbst gleich sind, gleich viel abgezogen wird; so muß von beyden Größen gleich viel übrig bleiben.

§. 109.

Erläuterung. Wenn Cajus und Titius gleichen Gehalt haben und man vermindert den Gehalt eines jeden um 100 Rthlr.; so behalten beyde auch nach dieser Verminderung einen gleich großen Gehalt.

Im Beweise §. 104. wurde nach diesem Grundsatze geschlossen:

wenn $x+o=y+o$ ist,

so ————————

muß der Rest x dem Reste y gleich seyn; indem von der Winkelgröße $x + o$ der Winkel x übrig bleibt, wenn man o davon abziehet, und von der andern Winkelgrösse $y + o$ der Rest y zurück bleibt, wenn man ebenfalls o davon abziehet.

§. 108.

Vorbereitende Erklärung.

Nehmt euren Spiegel vor Augen und, so weit sich die ebne Oberfläche des Spiegels erstreckt, (§. 48.) denkt euch eine aus den alleräussersten Theilchen des Spiegels bestehende Scheidewand zwischen dem Raume, der noch mit Glas angefüllt ist, und demjenigen Raume, wo nicht mehr Glas ist; oder, wie ihr vielleicht

am liebsten sprechen werdet, eine Scheidewand zwischen Glas und Luft. Wenn ihr euch diese Scheidewand so dünne, so wenig dick vorstellet, als es euch nur immer möglich ist, so erlangt ihr die Vorstellung von derjenigen ebnen Fläche, welche als eine Grenze des Spiegels betrachtet, eine ebne Oberfläche des Spiegels genannt wird.

§. 109.

Die Blätter mit den mathematischen Zeichnungen am Ende dieses Buches haben eine beträchtliche Dicke, die an ihrer Kante merklich genug ins Auge fällt.

Streckt ein solches Blatt dergestalt, daß seine Oberfläche, worauf sich die Zeichnungen befinden, nach einer Ebene liegt, und denkt euch von diesem Blatte bloß diese ebne Oberfläche, diese möglichst dünne Scheidewand zwischen der Papiermasse des ziemlich dicken Blattes und der Luft; so denkt ihr euch die ebne Fläche, worin die mathematischen Zeichnungen liegen. Denn in dieser Oberfläche allein und nicht in der innern Masse des Papieres muß man sich die auf dem Papiere gezeichneten Puncte und Linien vorstellen. Sie sind nicht dünner als die Fläche ist, und die Fläche ist nicht dünner als sie sind. Denn wolltet ihr euch vorstellen, daß die Puncte und Linien dünner als die Scheidewand

dewand wären; so dürftet ihr diese Scheidewand keine Fläche nennen, weil ihr euch dieselbe gewiß nicht so dünne gedächtet, als ihr es könntet, als ihr euch die Puncte und Linien wirklich gedenkt. Und wegen §. 1. und 4. dürfet ihr nicht behaupten, daß diese Scheidewand dünner sey, als die darauf gezeichneten Puncte und Linien.

§. 110. Zeichnung 28.

Die drey geraden Linien AB, BD und DA sondern aus der ebnen Oberfläche des Papieres, worauf sie verzeichnet sind, einen Theil aus, den sie umschliessen oder begrenzen, und stellen dadurch eine von drey geraden Linien begrenzte ebne Fläche dar, die man ein ebnes, geradeliniges Dreyeck, oder einen ebnen geradelinigen Triangel nennt. Wir haben es mit keinen andern als ebnen und geradelinigen Dreyecken zu thun, die man gewöhnlich auch gradezu Dreyecke nennt.

§. 111.

Erklärung. Eine von drey geraden Linien begrenzte ebne Fläche heißt ein geradeliniges ebnes Dreyeck.

Zusatz.

An jedem Dreyecke könnt ihr 7 Stücke einzeln betrachten; (1. 2. 3.) seine drey Seiten, (4. 5. 6.) seine drey Winkel, und (7.) die Größe seiner Fläche, deren Grenzen die 3 Seiten sind.

§. 112.

§. 112.

Vorbereitung. Wenn ich aus schwarzem Papiere ein Dreyeck schneide, und von euch verlange, aus weissem Papiere ein Dreyeck zu schneiden, welches dem meinigen in allen 7 Stücken vollkommen gleich sey; so könnt ihr das schwarze Dreyeck auf ein weisses Papier legen, und dieses längst den Seitenlinien des schwarzen Dreyeckes dergestalt beschneiden, daß das ausgeschnittene Stück von dem schwarzen Dreyecke völlig bedeckt wird, und umgewendet, auch der weisse Ausschnitt das schwarze Dreyeck eben so genau bedecken muß. Und ihr werdet behaupten, daß ihr ein dem meinigen vollkommen gleiches Dreyeck ausgeschnitten habet: wenn 1. diese gegenseitige Bedeckung, diese Aufeinanderpassung der Seitenlinien aus beyden Dreyecken, Statt findet; und wenn 2. dabey auch die auf einander gelegten Oberflächen der beyden Papiere in allen ihren Puncten dicht an einander liegen. Das Letztere geschiehet gewiß, wenn beyde Dreyecke nach einer Ebne gestreckt liegen, oder zwey ebne Dreyecke darstellen, indem ihre Seitenlinien dicht auf einander fallen.

** Anmerkung. Wenn man ein Stück Papier ein Dreyeck nennt, so denkt man bloß an die eine Oberfläche des Papieres.

§. 113. Zeichnung. 29. 28.

Erklärung. Wenn zwey ebne Dreyecke so auf einander gelegt sind, daß die drey Seiten des einen Dreyeckes, gerade auf die 3 Seiten des andern Dreyeckes fallen; so sagt man, daß beyde Dreyecke einander decken.

** Anmerkung 1. Eigentlich muß in unserer Vorstellung das Dreyeck $\alpha\beta\delta$ völlig in denjenigen Raum fallen, welchen das Dreyeck ABD einnimmt, so bald wir uns die beyden Dreyecke dicht auf einander gelegt vorstellen: weil die Flächen beyder Dreyecke eigentlich gar keine Dicke haben, †(Anm. 2) folgl. in eines zusammen fallen müssen, so bald sie allenthalben dicht an einander kommen oder einander berühren sollen. Dann fällt auch z. B. die Linie $\alpha\beta$ nicht auf, sondern in die Linie AB, und der Punct α nicht auf, sondern in den Punct A, und so fallen jede zwey übereinander gelegten Puncte aus beyden Dreyecken allenthalben in einen Punct zusammen. Auf der Vorstellung dieses gänzlichen Zusammenfallens beruht eigentlich die große Evidenz des folgenden Grundsatzes §. 114. Dennoch wird auch in gründlichen Lehrbüchern gewöhnlich gesagt, nicht daß man sich ein Dreyeck in das andere, sondern auf das andere gelegt vorstellen solle. Dabey will man nun entweder mit Fleiß, den Anfängern zu Gefallen, von der stren=

† Man sehe §. 114. Anmerkung 2.

strengen Vorstellung der Deckung etwas nachlassen, wozu das Wort decken selbst schon Veranlassung gibt; oder es soll hier aufgelegt so viel bedeuten, als von oben her hineingelegt. Das erste ist meine Absicht, — eben die, warum ich die vorbereitenden Erklärungen vom Puncte und der Linie §. 1. und 4. nur so eingerichtet haben, daß sie den wahren Erklärungen unendlich nahe kommen. Wer aber genauer denken will, kann in den folgenden §. 116. 123. 136. Statt auf allenthalben in oder hinein und unter zwey sich deckenden Linien und Flächen, solche Linien und Flächen verstehen, wovon die eine ganz genau in denjenigen Raum hineingedacht wird, welchen die andere einnimmt. **

** Anmerkung. 2. Die Geometer behaupten nähmlich von dem Puncte, daß er gar keine Ausdehnung habe, weder lang noch breit noch dick sey: von den Linien, daß sie nur eine Ausdehnung nach der Länge, aber gar keine Breite und gar keine Dicke haben, und von den Flächen, daß sie zwey Ausdehnungen, nach der Länge und Breite haben, aber ohne alle Dicke sind. Ein Raum, der endlich alle drey Ausdehnungen hat, heißt ein körperlicher Raum, weil alles, was man nach sinnlichen Begriffen

Körper nennet, einen solchen Raum einnimmt. †

Die Wahrheit dieser Begriffe erhellet auf folgende Weise. Jeder körperliche Raum hat drey Ausdehnungen, die man Länge, Breite und Dicke nennen kann. †† An dem parallelepipedalischen Raume eines Mauersteines fällt z. B. diese dreyfache Ausdehnung sehr deutlich in die Augen. Ohne Zweifel hat der Raum, welchen z. B. dieser Mauerstein einnimmt, seine Grenzen, hinter welchen derjenige Raum angehet, worinn kein Theil des Mauersteines mehr befindlich ist. Die Grenzen eines körperlichen Raumes heissen nun Oberflächen, und können keine Dicke haben; weil sie sonst keine Grenzen, sondern selbst noch Theile des kör-

per-

† Euklides sagt: Ein Punct ist, was keine Theile hat: eine Linie ist eine Länge ohne Breite: eine Fläche ist, was nur Länge uud Breite hat: Ein Körper ist, was eine Länge, Breite und Tiefe hat.

†† Eine beliebige Richtung im körperlichen Raume nennt man seine Länge; grösten Theils diejenige, welche aus irgend einer Ursache zuerst beachtet wird. Von denen unzähligen Richtungen, welche auf diese Länge normal sind, erhält eine beliebige den Nahmen der Breite, und darauf wird die eine Richtung, so auf diese beyden schon bestimmten senkrecht steht, seine Dicke (oder Tiefe oder Höhe) genannt.

perlichen Raumes wären. ††† Von jeder Oberfläche kann man sich einzele Theile vorstellen: und manche Oberflächen geben schon von selbst eine Veranlassung zu ihrer Zertheilung, wie die Oberfläche eines Mauersteins, die durch ihre eigene Gestalt schon in 6 Parallelogramme abgetheilt ist. Die Grenzen eines Theiles von irgend einer Oberfläche heissen Linien, Linien können also selbst keine Breite haben, eben darum, weil sie nur Grenzen der Oberflächen und keine Theile davon seyn sollen. Puncte heissen nun ferner die Grenzen der Linien, und müssen als solche nicht nur ohne alle Breite und Dicke, sondern auch ohne alle Länge seyn; das erstere, weil die Linien selbst weder Breite noch Dicke haben, das letztere, weil sie sonst keine Grenzen, sondern nur Theile von Linien, folglich selbst noch Linien wären.

§. 114.

Grundsatz.

Zwey Dreyecke die einander decken können, sind einander gleich.

††† Jede Oberfläche aber heißt eine Fläche, sobald man sie sich ohne Beziehung auf den körperlichen Raum gedenkt, dessen Grenzen sie abgab, und eine krumme oder mehrere ebene Flächen können in unserer Vorstellung sogleich zu Oberflächen werden, wenn wir sie als die Grenzen des körperlichen Raumes betrachten, der von ihnen umschlossen wird.

Zeichnung 29. 28.

Der Grundsatz behauptet: wenn das Dreyeck $\alpha\beta\delta$ sich mit dem Dreyeck ABD decken kann, so müssen nicht nur die Flächen der beyden Dreyecke gleich groß seyn; sondern auch einander gleich seyn jede zwey gleichliegenden Seiten und jede zwey gleichliegenden Winkel, das heißt, solche zwey Seiten und solche 2 Winkel, die bey der Deckung der beyden Dreyecke gerade auf einander fallen und selbst einander decken würden. Oder

wenn $\triangle\ \alpha\beta\delta \cong \triangle\ ABD$ so ————————	das heißt: wenn das Dreyeck $\alpha\beta\delta$ deckend ist (sich decken kann mit) dem Dreyeck
ist 1) $\triangle\,\alpha\beta\delta = \triangle\,ABD$	ABD so muß 1) die Fläche des Dreyeckes
und 2) $\beta\delta =$ BD	$\alpha\beta\delta$ so groß seyn als die Fläche des Dreyeckes ABD und 2)
und 3) $\alpha\delta =$ AD	
und 4) $\alpha\beta =$ AB	die Seitenlinie $\beta\,\delta$ so groß seyn als die
und 5) x = y	Seitenlinie BD und 3) die Seite $\alpha\delta$ so groß
und 6) m = n	seyn, als die Seite AD
und 7) u = o	u. s. w.

§ 115. Zeichnungen 29. 28.
Lehrsatz.

Wenn zwey Seiten und ihr Winkel in einem Dreyeck so groß sind, als in einem an-

dern

dern Dreyecke; so müssen die beyden Dreyecke einander decken können.

Ich sage, wenn bey den beyden Dreyecken $\alpha\beta\delta$ und ABD folgende 3 Bedingungen oder Voraussetzungen Statt finden, daß 1) $\alpha\beta = AB$ und 2) $\beta\delta = BD$ und 3) $y = x$ ist; so muß $\triangle\ \alpha\beta\delta \cong \triangle\ ABD$ oder das Dreyeck $\alpha\beta\delta$ deckend seyn dem Dreyeck ABD.

§. 116.

Beweis.

Da, wegen der 3ten Bedingung des Lehrsatzes, der Winkel $y = x$ seyn soll, so kann man sich (nach §. 58) das Dreyeck $\alpha\beta\delta$ dergestalt auf das Dreyeck ABD gelegt vorstellen, daß die Winkel y und x eiander decken, also §. 54. β auf B, der Schenkel $\beta\delta$ längst BD und zugleich der Schenkel $\beta\alpha$ längst BA fällt. Bey dieser Lage aber muß sich I) die Seite $\beta\delta$ decken mit BD, wegen der 2ten Bedingung, und zugleich II) die $\alpha\beta$ decken mit AB, wegen der 3ten Bedingung. Wenn nun I und II Statt findet, so fällt δ auf D und zugleich α auf A, folglich (§. 8. I.) auch die gerade Linie $\alpha\,\delta$ auf die AD oder III). es decken sich auch die dritten Seiten $\alpha\delta$ und AD, folglich nach §. 113. die ganzen Dreyecke $\alpha\beta\delta$ und ABD.

§. 117. Zeichnung 23. 24.

Zusatz.

Wenn zwey Seiten und ihr Winkel in einem Dreyecke so groß sind als in einem andern Dreyecke; so ist auch alles übrige in beyden Dreyecken gleich. Denn

wenn 1) $\alpha\beta = AB$

— 2) $\beta\delta = BD$

und 3) $y = x$

so ist ——————— Lehrsatz. §. 115.

$\triangle \alpha\beta\delta \cong \triangle ABD$

folglich ——————— ausser den 3 gleichen schon genannten Seiten nach §. 114.

auch 4) $\alpha\delta = AD$

und 5) $m = n$

und 6) $u = o$

und 7) $\triangle \alpha\beta\delta = \triangle ABD$ d. h. der Flächenraum des Dreyeckes $\alpha\beta\delta$ = dem Flächenraume des Dreyeckes ABD.

§. 118. Zeichnung 28. 29.

Practischer Zusatz.

Einem gegebenen Dreyecke ABD kann man ein anderes $\alpha\beta\delta$ vollkommen gleich machen,

wenn

wenn man $\beta\delta$ = BD und $\alpha\beta$ = AB macht, durch Hülfe des Zirkels und y = x, wobey ihr zur Uebung den Transporteur gebrauchen könnt.

§. 119. Zeichnung 2.

Vorbereitung. Sobald sich zwischen dem Baume bey A und dem Hause bey B ein dicker Wald, ein Berg oder nur eine zu unebne Gegend, ein Morast u. d. g. befände; so würde man die Entfernung zwischen A und B unmittelbar oder geradezu nicht messen können. Wenn es indessen nur irgend einen Punct C gibt, woraus wir die beyden Oerter A und B sehen, und nach geraden Linien mit der Meßkette erreichen können, wenn wir ferner auch hinter uns so viel ebnes Feld finden, daß wir diese beyden geraden Linien darin abtragen und die Entfernung ihrer Endpuncte $\alpha\beta$ messen können; so gibt der Lehrsatz eine Auflösung für folgende

§. 120. Zeichnung 2.

Practische Aufgabe.

Die Weite zweyer Oerter A und B zu finden, welche man gerade zu nicht messen kann.

§. 121.

Auflösung.

1) Messet von B bis zum angenommenen Standpuncte C (§. 16) die gerade Linie BC; verlän-

långert (§. 14.) diese gerade Linie über C hinaus so weit, bis Cβ = CB wird, und steckt eine Stange in β ein.

2) Messet ferner die gerade Linie AC und verlångert sie über C hinaus, bis Cα = CA wird, und bezeichnet das Ende α durch eine eingesteckte Stange. Messet nun 3) die gerade Linie $\alpha\beta$: ihr Maß ist zugleich das Maß von AB.

Beweis.

Es ist Cβ = CB gemacht
und Cα = CA gemacht und geworden y = x nach §. 88 u. §. 100
folglich ———— nach Lehrsatz §. 115

$\triangle \alpha\beta\delta \cong \triangle ABD$

folglich ———— §. 114

$\alpha\beta = AB$.

§. 122. Zeichnung. 29, 28.

Lehrsatz.

Wenn eine Seite und die beyden daran liegenden Winkel in einem Dreyecke so groß sind, als in einem andern; so müssen die beyden Dreyecke einander decken können.

Ich

Ich sage: wenn 1) $\beta\delta = BD$ 2) $y = x$ und 3) $u = o$ ist, so muß $\triangle \alpha\beta\delta \cong \triangle ABD$, das Dreyeck $\alpha\beta\delta$ deckend seyn dem $\triangle ABD$.

§. 123.

Beweis.

Man kann sich vorstellen, das Dreyeck $\alpha\beta\delta$ werde auf das Dreyeck ABD dergestalt gelegt, daß sich I. $\beta\delta$ mit BD deckt, wegen 1) und zugleich nicht nur der Schenkel $\beta\alpha$ långst BA fållt, wegen 2); sondern auch der Schenkel $\delta\alpha$ långst DA fållt, wegen 3). Folglich muß auch der aufgelegten Schenkel Schneidungspunct α gerade auf der unter ihnen liegenden Schenkel Schneidungspunct A fallen; also II. auch $\beta\alpha$ sich decken mit BA und III. $\delta\alpha$ sich decken mit DA. Nun muß, wenn I. II. und III. Statt findet nach §. 113 das $\triangle \alpha\beta\delta \cong \triangle ABD$ seyn.

§. 124.

Practischer Zusatz.

Dieser Lehrsatz gibt eine zweyte Art (s. §. 118) an die Hand, wie man ein Dreyeck $\alpha\beta\delta$ zeichnen kann, welches einem vorhandenen Dreyecke ABD vollkommen gleich wird. Wenn man nåhmlich einer beliebigen Seite z. B. der BD, und ihren beyden anliegenden Winkeln,

x und o

x und o die $\beta\delta$ mit ihren beyden anliegenden Winkeln y und u gleich macht; so müssen die beyden übrigen Seiten mit ihrem Winkel im Dreyecke $\alpha\beta\delta$ den beyden übrigen Seiten und ihrem Winkel im Dreyecke ABD von selbst gleich werden; auch wird der Flächenraum des Dreyeckes $\alpha\beta\delta$ dem Flächenraume von ABD gleich werden (§. 114.)

§. 125. Zeichnung 5.

Praktische Aufgabe.

Die Weite AC über einen Fluß, eine Grube u. d. zu messen, ohne daß man nach C kommen kann.

Auflösung.

Stelle dich vor den Fluß in B und drücke deinen Huth nieder bis der Punct C von der Huthspitze S. deinem Auge verdeckt wird. Dann drehe dich so weit herum, bis dir die Huthspitze einen Punct D auf einem ebenen Boden verdeckt, wo du die BD messen kannst: diese BD ist eben so lang als die BC. Denn beyde Linien sind zwey gleichliegende Seiten in zwey Dreyecken ABD und ABC, die einander decken können; weil 1. die eine Seite AB, oder die Höhe deines Auges über dem Erdboden eine den beyden Dreyecken gemeinschaftliche Seite ist: weil 2. der Winkel ABD in dem zweyten

Drey=

Dreyecke gleich ist dem Winkel ABC in dem ersten Dreyecke, indem sie beyde rechte Winkel sind, wenn der Punkt C weder höher noch niedriger liegt, als die horizontale Fläche des Erdbodens, worin die BD liegt; und weil 3. die Winkel BAD und BAC wohl einerley Größe behalten müssen, wenn man die Huthspitze unverrückt stehen läßt, und auch den Kopf weder senket noch in die Höhe richtet.

Anmerkung. Diese Messung wird desto unsicherer, je länger die BC gegen die BA ist. Wollte man Statt des Huthes einen vertikal gestellten Winkelmesser gebrauchen (s. §. 133); so könnte diese Meßart auch eine etwas größere Genauigkeit erhalten und unter manchen Umständen die einfachste und sicherste unter allen werden, z. B. wenn man sich auf einem Thurm o. d. befände, dessen Höhe BA in Vergleichung mit der BC eine beträchtliche Größe hätte. Das nöthige Verhältniß zwischen der Höhe AB und der Weite BC, und die davon mit abhangende Genauigkeit der Messung läßt sich allgemeinhin in der Kürze nicht bestimmen. Durch die Trigonometrie kann man nach der Einrichtung des gebrauchten Winkelmessers u. d. für jeden einzelen Fall die Grenzen zwischen den möglichen und den nicht mehr möglichen oder vermeidlichen Fehlern der Messung berechnen.

Die

Die Lehren von der Aehnlichkeit der Dreyecke geben andere Meßarten für die Breite eines Flusses u. d. an die Hand, welche allgemeiner und gröstentheils auch sicherer sind, als die angegebenen.

§. 126. Zeichnung 4.

Praktische Aufgabe.

Ein Wasser, welches um die Stange B fließt, wie es die 4te Zeichnung vorstellet, verhindert nicht nur die unmittelbare Messung der Weite AB, sondern auch die Anwendung der Auflösung im §. 121; weil man die CB nicht messen kann. Wie kann man dennoch die Weite AB erfahren?

§. 127.

Auflösung.

Wählet einen Standpunkt C, woraus ihr nach A hin messen, nach B hin aber ungehindert sehen und visiren könnet. Nun messet 1. die gerade Linie AC und verlängert sie über C hinaus, bis $C\alpha = CA$ wird; 2. Steckt bey H eine Stange dergestalt ein, daß der Winkel $C\alpha H =$ werde dem Winkel x (die folgenden Zusätze werden diese und die folgende 3te Forderung lehren): 3. Steckt eine Stange in β ein, d. i. bey demjenigen Puncte, wo die Ver-

Verlängerungen der geraden Linie BC und αH einander schneiden, so wird das Maß von $\beta\alpha$ auch dem Maße von BA gleich seyn.

§. 128.

Beweis.

Ihr habt alsdann $C\alpha = CA$ gemacht
und $y = x$ gemacht
und es muß $\angle\alpha C\beta = \angle ACB$ werden §. 100
folglich ——————§. 122.
$\triangle\alpha C\beta \cong \triangle ACB$
folglich —————— §. 114.
$\alpha\beta = AB$ seyn.

§. 129.

Zusatz.

Wir wollen hier drey verschiedene Arten zeigen, wie man dem Winkel x den Winkel y gleich machen kann, und besonders die erste Art darum zuvor auf dem Papiere lehren, weil sie im Kleinen am leichtesten begriffen wird, und dann auf dem Felde.

§. 130. Zeichnung 4.

I. Art: auf dem Papiere

Nehmt ein Stückchen Papier, es kann viereckig seyn, wie es in der 4ten Zeichnung

zwey-

zweymahl, um A und α, gezeichnet ist, legt es ohngefähr mit seiner Mitte über den Punct A und ziehet darauf den Schenkel AF in der Richtung AB und den Schenkel AG in der Richtung AC. Dieses Papier legt alsdann auf die Verlängerung Cα bey α dergestalt, daß der darauf verzeichnete Schenkel AG den Anfang dergeraden Linie αC in $\alpha\gamma$ bedeckt; so wird der andere Schenkel AF die Lage $\alpha\varphi$ einnehmen. Bemerket euch nun einen Punct H in der Verlängerung von $\alpha\varphi$ und zieht nach weggenommenen Papiere die Linie αH, so habt ihr den Winkel $\gamma\alpha H = \gamma\alpha\varphi =$ GAF = CAB gemacht.

§. 131.

auf dem Felde

gebraucht ihr Statt des Stückchen Papieres einen Meßtisch, d. h. ein Reißbret auf einen Fuß befestigt, den man bequem in die Erde stecken kann. An dem Hauptfuße, der allein bey A gezeichnet ist, befinden sich zu mehrerer Befestigung grösten Theils noch drey Nebenfüße, die man durch Schrauben stellen kann.

Auf diesen Meßtisch zeichnet man nun die Linie a f gerade über dem Anfange der Linie AB vermittelst eines Dioptern-Lineales.

Ein

Ein ganz einfaches Dioptern-Lineal erhält man, wenn man auf den beyden Enden eines gewöhnliches Lineales zwey normal stehende Bretchen befestigt, in deren Mitten sich, bey h eine normale schmahle Ritze, und bey i ein normaler Faden in einer breitern Ritze befindet, so daß die Ritze bey h und der Faden bey i dicht an der Schärfe des Liniales stehen. Haltet nun euer Auge vor die Ritze h und drehet das Lineal um einen bezeichneten Punct a, der gerade über A liegt, so lange bis die Stange B b durch den Dioptern = Faden i bedeckt wird; so könnt ihr längst dem Liniale die Linie a f gerade über der A B ziehen. Verdrehet ferner an dem Puncte a das Dioptern = Lineal, bis eurem Auge vor der Ritze h durch den Faden i die Stange bey C verdeckt wird; so könnt ihr die Linie a g gerade über dem Anfang der A C ziehen: und ihr habt ohne Zweifel auf eurem Meßtische den Winkel f a g $= \angle$ B A C gemacht.

Nun stellet diesen Meßtisch bey α ein, so daß sein Punct a in α gerade über α und seines verzeichneten Winkels Schenkel a g in $\alpha\gamma$ gerade über den Anfang der Linie α C zu liegen kommt: indem ihr das Dioptern-Linial längst den Schenkel a g fest anhaltet und dabey den Meßtisch selbst so lange drehet, bis ihr vermittelst der Dioptern diese Stellung gefunden habt, worin $\alpha\gamma$ gerade über dem Anfange von α C

liegt.

liegt. Bey dieser Stellung wird der andre Schenkel wie af gerade über den Anfang der gewünschten Linie $\alpha\beta$ zu liegen kommen. Legt also das Dioptern-Lineal an den Schenkel af und laßt gerade vor dem Dioptern-Faden i die Stange H h einstecken, so habt ihr den Winkel HαC = fag = fag = FAG = BAC gemacht.

§. 132.

Nachdem ihr den Meßtisch weggenommen und in α wiederum eine Stange eingesteckt habt; so geht, eine andere Stange in der Hand, auf der Verlängerung der geraden Linie αH rückwärts so lange fort, bis ihr sehet, daß ihr auf dem Puncte b stehet, da nähmlich, wo euch nicht nur die Stange bey a von der Stange bey H sondern zugleich auch die Stange bey B von der Stange bey C verdeckt wird. Dies ist der Punct, wo die Verlängerungen der geraden Linien αH und BC einander schneiden, oder in einen Punct zusammenlaufen. Hier steckt die Stange βb ein.

§. 133.

IItens (s. §. 131.) könnt ihr auf dem Papiere dem Winkel CAB den Winkel C$\alpha\beta$ vermittelst des Transporteurs, gleich machen

Auf

Auf dem Felde gebraucht man auf ähnliche Weise ein Astrolabium oder einen Winkelmesser, d. i. einen großen Transporteur, der auf einem bequemen Fuße ruhet und bald auf diese bald auf jene Weise mit Dioptern versehen ist, deren Gebrauch von selbst einleuchtet, wenn man dergleichen Instrument vor sich hat, und übrigens nur in dem Gebrauche des Transporteurs auf dem Papiere und des Meßtisches auf dem Felde nach §. 131. hinlänglich geübt ist.

§. 134.

Endlich aber sind III. in Ermangelung eines Meßtisches und eines Astrolabii auch bloße Meßstangen nebst der Meßkette allein schon hinreichend den Winkel $\gamma\alpha\varphi$ dem Winkel G A F gleich zu machen; wenn man folgenden Lehrsatz inne hat.

§. 135. Zeichnung 29. 28.

Lehrsatz.

Wenn alle drey Seiten eines Dreyeckes den drey Seiten eines andern Dreyeckes gleich sind; so müssen beyde Dreyecke einander decken können.

Ich sage, wenn

1) $\beta\delta$ = B D,

2) $\beta\alpha$ = B A und

3) $\delta\alpha$ = D A ist; so muß $\triangle\ \alpha\beta\delta \cong$ $\triangle$ A B D seyn.

§. 136.

Beweis.

Man kann sich das △ $\beta\delta\alpha$ auf das Dreyeck B D A dergestalt gelegt vorstellen, daß sich I. $\beta\delta$ mit BD deckt, wegen 1) und daß des aufgelegten Dreyeckes Spitze α auf eben die Seite von BD hinfällt, worauf die Spitze A liegt. Bey dieser Lage muß nun, da nach 2) $\beta\alpha = AB$ seyn soll, die Spitze α nothwendig auf dem mit BA beschriebnen punctirten halben Umkreise liegen, und da zugleich auch 3) $\delta\alpha = DA$ seyn soll; so muß die Spitze α zugleich auch auf den aus D mit D A beschriebnen halben Umkreis, folglich gerade über dieser beyden Halbkreise Schneidungspunct A, zu liegen kommen. Folglich muß sich da nach I. schon β auf B und δ auf D liegt, auch II. $\beta\alpha$ decken mit B A und III. $\delta\alpha$ decken mit D A. Also decken sich die beyden Dreyecke §. 113.

§. 137. Zeichnung 29. 28.

Zusatz.

Einem gezeichneten Dreyecke $\alpha\beta\delta$ kann man demnach ein anderes Dreyeck A B D vollkommen gleich machen, indem man $BD = \beta\delta$ macht; mit der Weite $\beta\alpha$ aus B und mit der Weite $\delta\alpha$ aus D die beyden Kreisbogen so weit be-

beschreibt, daß man ihren Durchschnittspunct A findet, und darauf die geraden Linien AB und AD ziehet, welche dann den beyden Linien $\alpha\beta$ und $\alpha\delta$ gleich werden.

Anmerkung. Diese Zeichnungsart ist bequemer, als die in §. 118. und §. 124. gelehrten. Ihr Hauptvorzug aber besteht darin, daß man dazu bloß Zirkel und Linial und nicht wie bey jenen auch einen Transporteur nöthig hat. Warum das ein so großer Vorzug sey, kann erst bey einem gründlichen Vortrage der Geometrie begriffen werden.

§. 138. Zeichnung 4.

Einen Winkel wie y an dem beliebigen Puncte α einer geraden Linie αC einem andern schon vorhandenen Winkel x gleich zu machen, und zwar bloß mit Hülfe des Zirkels und Lineales.

§. 139. Zeichnung 4.

Auflösung und Beweis.

Aus des einen Schenkels von x beliebigem Puncte G ziehet nach einem beliebigen Puncte F

des andern Schenkels die gerade Linie G F; so habt ihr ein Dreyeck AGF.

Nun machet $\alpha\gamma = AG$
und $\alpha\varphi = AF$
und $\gamma\varphi = GF$, §. 135.
so ——————————— §. 135.
muß $\triangle\, \alpha\gamma\varphi \cong \triangle\, AGF$
folglich ——————————— §. 114.
$y = x$ seyn.

§. 140. Zeichnung 4.

Zusatz.

Dies ist die in §. 134. versprochene IIIte Art, wie man dem Winkel x den Winkel y gleich machen kann. Auf dem Felde gebraucht man dazu nichts weiter als die gewöhnlichen Meßstangen und eine Meßkette.

Machet nähmlich $\alpha\gamma = AG$ etwan $= 3$ Ruthen und bezeichnet die beyden Puncte G u. γ jeden durch eine Stange. Dann steckt auf der geraden Linie AB eine Stange bey F dergestalt ein, daß 1) die Meßkette bey A ein- und um F herumgelegt bis nach G wenigstens hinreicht, und daß 2) der Punct F gerade an das Ende eines Gliedes in der Kette fällt.

Nun

Nun halte August das eine Ende der Meß- kette in A fest, indem Gottlieb diese Kette um die Stange F herum und nach G hin straff an- zieht, daß sowohl die Linie AF als die FG mit der Kette bedeckt wird. Wenn die Kette auf diese Weise straff liegt, so hebt nun August das Ende bey A, Gottlieb den bey G und Friedrich den bey F liegenden Punct der Kette auf, und so tragen alle drey die Kette fort, bis Gottlieb seinen an der Kette festgehaltenen Punct bey γ und August sein Ende bey α anlegen kann. Ziehet nun Friedrich endlich an seinem ge- faßten Puncte die ganze Kette straff und gibt ihr dadurch die Lage $\alpha\varphi\gamma$; so muß nach §. 135. das $\triangle\gamma\alpha\varphi$ sich decken mit dem $\triangle$GAF folglich §. 114. auch y = x werden.

§. 141. Zeichnung 32.

Aufgabe.

Jeden beliebigen Winkel B A D in zwey gleiche Winkel zu zertheilen.

§. 142.

Auflösung.

Fasset auf einem Schenkel die Linie A E, so lang als ihr wollet, zwischen den Zirkelspitzen und macht A F = A E. Aus den Puncten E und F beschreibt mit einerley Weite des Zir- kels

kels die beyden Kreisbogen, welche sich in dem Puncte G schneiden. Die gerade Linie A G theilet den Winkel B A D in zwey Winkel x und y die einander gleich sind.

§. 143. Zeichnung 32.

Beweis.

Denn ziehet zur Hülfe des Beweises die Hülfslinien E G und F G; so erhaltet ihr zwey Dreyecke A E G und A F G, welche ihrer drey gleichen Seiten wegen einander decken, und worin folglich die beyden gleichliegenden Winkel x und y einander gleich seyn müssen.

Ihr habt nähmlich

AE = AF gemacht } laut der Auf-
und E G = F G gemacht } lösung.
da nun A G = A G ist, d. h. da die A G in so fern sie eine Seite des Dreyeckes A E G abgibt, nicht größer und nicht kleiner seyn kann, als sie ist, wenn sie als eine Seite des Dreyeckes AFG betrachtet wird.

---

so muß $\triangle AEG \cong \triangle AFG$, folglich $x = y$ seyn. §. 114.

§. 144.

§. 144. Zeichnung 32.

Zusatz.

Ein Kreisbogen EF wird in zwey gleiche Bogen durch dieselbe Linie AG zertheilt, wodurch der Winkel an seinem Mittelpuncte (§. 66.) EAF in zwey gleiche Winkel zertheilt wird:* weil jede zwey gleiche Winkel am Mittelpuncte auch gleiche Bogen bespannen. §. 71.*

§. 145. Zeichnung 30.

Aufgabe.

Jede gerade Linie zu halbiren.

§. 146.

Auflösung und Beweis.

Macht DC = EC
und DF = EF und ziehet d. gerad. Linie CF.
Da nun CF = CF
so ———————— muß §. 135.
$\triangle DCF \cong \triangle ECF$
folgl. ———————— §. 114.
$\angle x = \angle y$ seyn. Noch einmahl bedacht
daß CD = CE gemacht ist, und ferner,
daß CG = CG seyn muß,
so ———————— wißt ihr aus §. 115.
daß $\triangle CDG \cong \triangle CEG$
folgl. ———————— §. 114.
DG = GE seyn muß.

§. 147.

§. 147. Zeichnung 30.

Aufgabe.

Aus einer geraden Linie AB beliebigem Puncte G eine Normallinie GC aufzurichten.

§. 148.

Auflösung und Beweis.

Machet GD = GE
und DC = EC und ziehet GC: sie ist die verlangte Normale.

Denn da GC = GC
so muß ———————— §. 135.
$\triangle GDC \cong \triangle GEC$
folglich o = u seyn, folglich §. 83. die CG normal auf AB stehen.

§. 149. Zeichnung 30.

Aufgabe.

Aus einem beliebigen Puncte C außerhalb der geraden Linie AB auf diese AB eine Normallinie CG zu fällen.

§. 150.

Auflösung und Beweis.

Macht CD = CE
und DF = EF und ziehet CF.
Da nun CF = CF ist,
so ———————— muß §. 135.
△CDF ≅ △CEF
———————— §. 114.
x = y seyn. Nunmehr noch ein-
mahl bedacht,
daß CD = CE gemacht ist,
und daß CG = CG seyn muß,
so ———————— ergibt sich nach
§. 115.
daß △CDG ≅ △CEG
———————— §. 117.
o = u
———————— §. 83.
CG normal steht auf AB.

§. 151. Zeichnung 30.

Practischer Zusatz.

Auf dem Felde macht man bey der vorletzten Aufgabe §. 147. die GD und GE beträchtlich kürzer, als die Hälfte der Meßkette. Dann läßt man die beyden Enden der Meßkette, das eine in D, und das andere in E fest halten und

ziehet

ziehet die Kette bey ihrer Mitte C straff an; so wird G C normal stehen auf A B.

Bey der letzten Aufgabe §. 149. kann man auch auf dem Felde CE=CD machen; wenn C so nahe liegt, daß man die gerade Linie A B durch einen Kettenschlag von C aus erreichen kann. In diesem Falle macht man das eine Ende der Kette in C fest und ziehet sie in einer Lage wie CE dergestalt an, daß der Kette anderes Ende E in die gerade Linie zwischen A und B trift: macht darauf CD=CE und findet dann den Punct G lieber dadurch, daß man DE halbirt, als daß man den Schneidungspunct F sucht. Denn wenn DG=GE gemacht wird, so müssen sich die beyden Dreyecke CDG und CGE wegen §. 135. eben so wohl decken, als wenn man den Punct G durch die Linien CF bestimmt, wie es in §. 150. vorgeschrieben und auf dem Papiere bequemer ist.

§. 152. Zeichnung 31.

* Ist aber C zu weit entfernt, als daß ihr durch eure Kette oder eine andere Schnur die gerade Linie AB von C aus mit einem Mahle erreichen könntet; so messet in der Linie AB einen beliebigen Theil DE. Doch rathen wir hier mit Vorbedacht, diesen Theil DE so zu wählen, daß von der gesuchten Normale C G der Punct G zwischen die Puncte D und E falle,

und die doppelte Zahl des Maßes von DE einen bequemen Divisor abgebe. In dieser letzten Hinsicht sey z. B. DE = 50° folglich 2 DE = 100°.. Messet nun auch die beyden Linien DC und EC und drücket beyde Linien nach einerley Maße aus.

Es sey z. B.

DC = 41° und CE = 42° 8′ 4″; so reducirt ihr beyde Maße
auf Zolle und habt DC = 4100″
und CE = 4284″

---

also die Summe DC + CE = 8384″. Diese Summe multipliciret durch
die Differenz CE — DC = 184, welche ihr erhaltet, indem ihr
von der größern Linie CE die kleinere Linie DC abziehet

33536
67072
8384

In das Product 1542656 dividiret durch die Zahl des Maßes von 2. DE, welche ebenfalls nach Zollen ausgedrückt = 1000 ist; so erhaltet ihr 154″ 2‴ $\frac{656}{1000}$‴, welches die Weite von M bis zum gesuchten Puncte G angibt, indem M die Mitte von DE ist: es mag nun diese Mitte M zur Linken oder zur Rechten

von

Blätter statt der beyden ähnlichen im Texte einzubinden.

von G fallen. Welches von beyden der Fall sey, wird man durch das bloße Augenmaß schon beurtheilen können. Die Gründe dieser Berechnung, welche man hier nicht erklären kann, ergeben sich aus der LXVIten Aufgabe im ersten Bande meines algebraischen Lehrbuches.

§. 153. Zeichnung 33.

Zugestandner Satz.

Zwey gerade Linien können einander nicht öfter als einmahl schneiden.

§. 154.

Erläuterung. Es kann vielleicht gerade Linien geben, die einander gar nicht schneiden, man mag sie verlängern so viel man will, auch wenn sie beyde in einerley Ebne liegen. Solche Linien sind, schon dem bloßen Augenscheine nach zu urtheilen, die beyden AB und CD in der 34sten Zeichnung. Allein der Satz behauptet auch nur: wenn zwey gerade Linien, z. B. AB und EF in dem Puncte G einander durchkreuzen; so werden sich diese beyden Linien nie wieder zum zweyten Mahle durchkreuzen man mag sie auch an ihren beyden Enden so weit verlängern als man nur immer will; und das werdet ihr gern und unwiderruflich zugestehen.

** Anmerkung. Ich kenne keine Erklärung von dem, was jedermann unter der Schneidung zweyer Linien versteht, die ich hier gerne hätte aufnehmen mögen; auch ist der Begriff so wenig zusammengesetzt, daß es unnöthig scheint, die Anfänger durch seine Erklärung aufzuhalten. Wollte man sie aber aus Liebe zur möglichsten Genauigkeit geben, so müste sie die Schneidung krummer Linien mit umfassen und dann würde man Statt eines hiebey gewöhnlichen Grundsatzes, daß zwey gerade Linien einander in nicht mehr als einem Puncte schneiden können, folgende zwey Sätze erhalten: 1) Zwey Linien haben, wo sie einander schneiden, nur einen Punct gemein: 2) Zwey gerade Linien können sich nicht öfter als einmahl schneiden. Jener würde einen Theil der Erklärung ausmachen und dieser aus irgend einem wesentlichen Merkmahle der geraden Linie zu erweisen seyn. **

Erklärungen.

§. 155. Zeichnung. 33.

Wenn zwey gerade Linien AB und CD von einer dritten EF geschnitten werden, so entstehen 8 Winkel, worunter diejenigen vier, welche innerhalb den beyden Linien fallen, nähmlich o, x, y, u überhaupt innere Winkel, die vier übrigen aber, welche ausserhalb den beyden

Linien

Linien fallen, nähmlich n, m, s, t, überhaup[t] äussere Winkel genannt werden.

Von den 4 innern Winkeln heissen je[de] zwey, welche beyde an einer Seite der schne[i]denden Linie EF liegen, ein paar einseitige in[n]ere Winkel. Das eine Paar ist x und u, da[s] andere o und y.

Ein Paar Wechselswinkel aber besteht au[s] zwey innern Winkeln, die in Rücksicht auf di[e] schneidende Linie verwechselte Lagen und Oef[f]nungen haben. Die beyden Paare Wechsels=winkel sind also o und u, desgleichen x und y. Denn z. B. o liegt an der linken Seite vo[n] EF und öffnet sich nach unten (nach der Gegen[d] von F) hin indem u an der rechten Seite vo[n] EF liegt und sich nach oben (nach der Gegend von E) hin öffnet.

Für jeden der äussern Winkel gibt es un=ter den 4 innern Winkeln einen ihm ganz gleich=liegenden Winkel, der nicht nur mit ihm an einerley Seite der schneidenden Linie liegt, son=dern sich auch mit ihm nach einerley Gegend hin öffnet. Die vier Paare gleichliegender Winkel sind m und u, n und y, t und x, s und o. Z. B. s und o liegen beyde auf der linken Sei=te von EF und öfnen sich beyde nach der Gegend von E hin.

§. 156. Zeichnung 34.

Erklärung. Zwey gerade Linien, welche 1) sich niemahls schneiden, man mag sie an bey=

den

den Seiten verlängern so weit man nur will, und dabey 2) in einer Ebne liegen, heissen parallel.

§. 157. Zeichnung 34.

Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien, welche in einer Ebne liegen, wie AB und CD, an einer dritten geraden Linie EF zwey gleichseitige innere Winkel machen, x und u oder o und y, deren Summe = 180° ist; so sind die beyden Linien AB und CD parallel.

Wenn z. B. $x + u = 180^\circ$

so ——————

muß AB || CD

das heißt, AB parallel der CD seyn.

§. 158.

Beweis.

Wenn $x + u = 180^\circ$ ist, so muß, weil auch $x + o = 180^\circ$ ist, nothwendig $o = u$ seyn.

Ferner muß, wenn $x + u = 180^\circ$ ist, weil auch $y + u = 180^\circ$ nothwendig $y = x$ seyn. Folglich können sich die Winkel y und x, desgleichen u und o einander decken §. 58.

Da nun in der Zeichnung CHGA die Spitzen ihrer Winkel y und o eben so weit von einander entfernt liegen, als die Spitzen der beyden Winkel x und u in der Zeichnung

BGHD

BGHD; so kann man sich die eine Zeichnung auf die andere dergestalt gelegt vorstellen, daß sich beyde Paare von gleichen Winkeln y, x und o, u zu gleicher Zeit decken, folglich die beyden unbegrenzten Schenkel der einen Zeichnung gerade auf die unbegrenzten Schenkel der andern Zeichnung fallen müssen. Sobald ihr daher annehmen wolltet, daß die unbegrenzten Schenkel der einen Zeichnung zusammen laufen und sich endlich schneiden würden, so müßtet ihr nothwendig zugeben, daß ebenfalls auch die unbegrenzten Schenkel der andern Zeichnung zusammenlaufen und sich endlich schneiden müsten; oder daß die beyden geraden Linien AB und CD auf beyden Seiten von FG gegeneinander zusammenlaufen und einander schneiden müsten; da sich doch nach §. 195. zwey gerade Linien nicht zweymahl schneiden können.

Weil ihr demnach nicht annehmen dürfet, daß sich die beyden Linien AB und CD auf irgend einer Seite schneiden können; indem daraus der falsche Satz folgen würde, daß sie sich auf beyden Seiten schneiden müsten: so müßt ihr zugeben, daß beyde Linien einander gar nicht schneiden können.

§. 159. Zeichnung 34.

Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien, welche in einer Ebene liege, nan einer dritten geraden Linie zwey gleiche Wechselswinkel machen; so sind die beyden Linien parallel

Wenn z. B. o = u, so muß AB || CD seyn.

§. 160.

Beweis.

Wenn o = u ist, so muß, da x + o = 180° ist, auch x + u = 180° seyn. Nun sind x und u zwey einseitige innere Winkel, folglich muß nach §. 157. AB || CD seyn.

§. 170. Zeichnung 34.

Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien, welche in einer Ebene liegen, an einer dritten schneidenden Linie ein paar gleichliegende Winkel machen, die einander gleich sind, so sind die beyden Linien parallel.

Wenn z. B. m = u ist, so muß AB || CD seyn.

§. 171.

Da $x + m = 180°$ ist, so muß, wenn $m = u$ ist, auch $x + u = 180°$, folglich nach §. 157. $AB \parallel CD$ seyn.

§. 172. Zeichnung 35.

Zugestandner Satz. †

Wenn zwey gerade Linien AB und CD an einer dritten geraden Linie zwey einseitige innere Winkel x und u machen, deren Summe weniger als 180° beträgt; so schneiden sich die beyden Linien AB u. CD gehörig verlängert an dieser nähmlichen Seite.

§. 173.

Erläuterung. Ziehet euch nur die punctirte Linie LN, so daß die einseitigen inneren Winkel $u + HGN = 180°$ werden; so wißt ihr nach §. 157. daß sich diese punctirte Linie mit der CD niemahls schneiden wird. Wenn ihr dagegen die Lage von AB betrachtet; so werdet ihr hinlänglich überzeugt werden, daß sich die AB gehörig verlängert allemahl mit der CD schneiden wird, sobald der Winkel x kleiner als HGN folglich $u + x$ kleiner als $u + HGN$ d. i. kleiner als 180° wird.

§. 174.

† Der berüchtigte 11te Grundsatz des Euklides, den der Herr Prof. Hindenburg endlich zum Lehrsatze erhoben, aus andern evidentern Euklideischen Grundsätzen erwiesen hat. Leipz. Magaz. 1782. 2. und 3. Stück.

§. 174. Zeichnung 34.

Lehrsatz.

Wenn zwey Parallellinien AB CD von einer dritten geraden Linie geschnitten werden; so müssen jede zwey einseitigen inneren Winkel 180° ausmachen.

§. 175.

Beweis.

Die beyden innern Winkel u + x halten entweder 180°, oder sie halten nicht 180°. Ihr seyd überzeugt, daß der erste Satz wahr seyn muß, wenn ihr überführt werdet, daß der letzte Satz falsch sey; und das wird durch folgende Schlüsse geschehen.

Wären die beyden innern Winkel u + x nicht = 180°, so müsten sie entweder weniger oder mehr als 180° betragen. Im ersten Falle müsten sich die beyden Linien AB und CD an der Seite von GH schneiden, wo die beyden Winkel x und u liegen, §. 172; im andern Falle, wo x+u mehr als 180° hielten, müsten dagegen die beyden andern inneren Winkel o + y weniger als 180° halten, (weil alle 4 innere Winkel o+x+y+u, als zwey Paar von Nebenwinkeln, zusammengenommen 2mahl 180° halten müssen) und die beyden Linien

AB und CD müsten sich demnach wegen §. 172. an der andern Seite von GH schneiden.

Wenn ihr daher an die beyden Linien AB und CD folgende 2 Forderungen thun wolltet: 1. ihr beyden Linien sollt parallel seyn und ihr sollt 2. dennoch 2 einseitige innere Winkel machen, deren Summe nicht 180° beträgt; so würdet ihr euch einer Ungereimtheit schuldig machen, und von den beyden Linien zweyerley verlangen, wovon das eine dem andern widerspricht. Denn durch die erste Forderung verlangt ihr von ihnen, daß sie sich an keiner Seite schneiden sollen, und gleichwohl wären sie vermöge eines wahren Satzes §. 172 gezwungen, sich an der einen oder der andern Seite zu schneiden, wenn sie eurer zweyten Forderung Genüge thun sollten.

§. 176. Zeichnung 34.

Lehrsatz.

Wenn zwey Parallellinien von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, so müssen, 1. jede zwey Wechselswinkel und 2. jede zwey gleichliegenden Winkel einander gleich seyn.

§. 177.

§. 177. Zeichnung 34.

Beweis.

Wenn AB || CD, so ist $x+u = 180^\circ$ nach §. 174

Da nun auch die Nebenwinkel $x+o = 180^\circ$ nach §. 85.

so muß
$$\overline{}$$
$$x+u = x+o$$
folglich
$$\overline{}$$
$$u = o \text{ seyn,}$$
welches das 1te war.

Da nun nach §. 100 auch $m = o$ ist,

so muß auch $m = u$ seyn:
welches das 2te war.

Diese Beweise lassen sich nähmlich bey jeden 2 Wechselswinkeln und bey jeden 2 gleichliegenden Winkeln anbringen. Denn für jede zwey Wechselswinkel muß es einen dritten Winkel geben, der mit dem einen von den Wechselswinkeln zwey Nebenwinkel, mit dem andern aber zwey einseitige innere Winkel ausmacht, u. s. w. Und für jede zwey gleichliegende Winkel gibt es allemahl einen dritten Winkel, der zugleich des einen gleichliegenden Winkels Scheitelwinkel und des andern Wechselswinkel ist.

§. 178. Zeichnung 40.

Aufgabe.

Durch einen beliebigen Punkt i eine Linie wie kM zu ziehen, welche einer verzeichneten Linie AB parallel wird.

§. 171.

Auflösung und Beweis.

In eurem Reißzeuge werdet ihr ein dreyeckiges Bretchen wie CDE finden: wir wollen es das Schiebe-Lineal, oder noch kürzer den Schieber nennen.

Leget diesen Schieber mit seiner einen Seite CD in die verzeichnete Linie AB; dicht an seine andere Seite CE legt ein gewöhnliches Lineal L an, und schiebet längst diesem Lineale den Schieber in die Höhe, bis seine Seite C D den Punct i erreicht, und ihr also dieser Seite gemäß eine Linie kM ziehen könnet, welche durch den Punct i gehet. Diese Linie kiM muß der AB parallel seyn, nach §. 170, weil die beyden gleichliegenden Winkel δkε und DC E einander gleich gemacht sind.

§. 180.

Vorbereitung. Macht euch Dreyecke so viel und von welcher Gestalt ihr nur wollt. Messet die 3 Winkel in jedem Dreyecke und addiret die Zahl ihrer Grade zusammen. Ich will eure Dreyecke gar nicht sehen und euch doch sagen, wie groß die Summe dieser Grade in jedem Dreyecke seyn muß, das ihr schon gemacht habt oder künftig noch machen wollt. Die Summe, welche ich euch angebe, wird mit der eurigen, die ihr durch mühsame Messung mit dem Transporteur gefunden habt, ganz genau übereinstimmen; wenn ihr ganz richtig gemessen habt, welches nur selten der Fall seyn wird.

§. 181.

Lehrsatz.

In jedem Dreyecke ist die Summe von allen drey Winkeln gleich 180°.

§. 182. Zeichnung 52.

Beweis.

Einer beliebigen Seite des Dreyeckes z. B. der AB ziehet durch die ihr entgegen stehende Spitze des Dreyeckes C die Linie DE parallel, so müssen die Wechselwinkel o und u, des

glei-

gleichen x und y gleich seyn, und ihr könnet schliessen:

$$\left.\begin{array}{l}\text{es ist } y = x \\ \quad u = o\end{array}\right\}\text{nach §. 176. no. 1.}$$

Da nun gewiß c = c seyn muß
so ——— §. 185.
muß y+u+c=x+o+c seyn.

Nun ist aber nach §. 87 $x+c+o = 180°$, folglich auch $y+c+u = 180°$

§. 183.

1. Folgerung. Wenn man in einem Dreyecke einen Winkel gemessen hat; so weiß man auch die Summe der beyden übrigen. Denn gesetzt der eine Winkel u halte 45°; so müssen die beyden übrigen zusammen genommen noch 180° weniger 45°, d. i. 135° halten

§. 184.

2. Folgerung. Kein Dreyeck kann mehr als einen rechten oder einen stumpfen Winkel enthalten. Denn so bald ein Winkel recht ist, oder 90° hält; so müssen sich die beyden übrigen in 90° theilen: folglich muß, jeder von ihnen einzeln genommen weniger als 90° halten, also spitz seyn, §. 83. Ist aber ein Winkel im Drey-

Dreyecke stumpf, und hält folglich mehr als 90° §. 86.; so bleibt für die beyden übrigen zusammen genommen noch weniger als 90° übrig.

§. 185.

Grundsatz.

Gleiches zu gleichem addirt gibt gleiche Summen.

Ein Satz, der eben so klar ist und eben so durch einzele Beyspiele erläutert werden kann, als die Grundsätze in §. 104. und 106.

§. 186.

Erklärung. Eine mit Linien begrenzte Fläche heißt eine Figur.

§. 187. Zeichnung 20.

Zusatz.

Die Kreisfläche ist durch eine krumme Linie begrenzt §. 60; also ist der Kreis eine krummlinige Figur.

Eines Kreises Ausschnitt (sector) d. i. ein durch zwey Halbmesser CA CB und einen von ihnen bespannten Bogen AB begrenzter Theil der Kreisfläche, ist eine Figur von zwey geraden und einer krummen Seitenlinie.

Ein=

Eines Kreises Abschnitt (segmentum) d. i. die von einem Bogen lmn und seiner zugehörigen Sehne ln begrenzte Fläche ist eine von einer geraden und einer krummen Linie begrenzte Figur.

Die 8te, 9te bis 12te, 25ste und 26ste Zeichnung und mehrere andere stellen keine Figuren vor, weil die zu ihnen gehörigen Linien in der Oberfläche des Papieres, worauf sie verzeichnet sind, keinen Flächenraum einschliessen und begrenzen. Hingegen ist jedes Dreyeck z. B. in der 28. Zeichnung eine Figur, und zwar eine dreyseitige Figur. (s. §. 189.)

§. 188.

Erklärung. Eine Figur von 3, 4, 5 u. m. Seiten heißt ein Dreyeck, Viereck, Fünfeck u. s. w.

* Anmerkung. Jede Figur muß ja wohl eben so viele Seiten haben, als sie Ecken oder Winkel hat; weil man jede Winkelspitze als den Endpunct von einer und den Anfangspunct von einer andern Seite betrachtet. Fänden sich z. B. ich Umfange einer Fignr 7 Winkelspitzen; so hätte man 7 Anfangs- und 7 Endpuncte für die verschiedenen Seiten der Figur. Da nun jede Seite einen Anfangs- und einen

End-

Endpunct haben muß; so muß jede 7eckige Figur auch 7seitig seyn.

§. 189.

**2. Anmerkung. Das §. 111 erklärte Dreyeck ist, genau zu reden, eine dreyseitige, geradelinige, ebne Figur. Verzeichnet euch auf der Oberfläche einer Kugel 3 beliebige Puncte, und ziehet zwischen jeden zwey Puncten eine Linie in der Oberfläche der Kugel: so stellt euch der von diesen Linien begrenzte Theil der Kugeloberfläche eine dreyseitige, krummlinige, unebne Figur dar. Manche geben auch einem begrenzten körperlichen Raume den Nahmen der Figur, wovon erst in der Stereometrie gehandelt wird. Wenn wir künftig schlechthin Figur sagen, so verstehen wir allemahl eine durch gerade Linien begrenzte Fläche.

§. 190. Zeichnung 44.

Erklärung. Ein Viereck, welches nur 2 parallele Seiten AB, CD hat, heißt ein Trapezium.

§. 191. Zeichnung 45.

Ein Viereck, welches 2 Paar parallele Seiten hat, heißt ein Parallelogramm. Wenn AB || CD und AC || BD ist, so heißt ABCD eiu Parallelogramm.

§. 192.

§. 192. Zeichnung 45.

Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme ABCD sind die gegenüberstehenden Winkel I. x und u, II. o und y einander gleich.

§. 193.

Beweis.

Wenn ich sage, ABCD ist ein Parallelogramm, so behaupte ich damit: 1) es ist AB || CD und 2) es ist AC || BD.

Nun sind o + x zwey innere einseitige Winkel der Parallelen AB und CD folgl. o + x = 180° §. 174. Desgleichen sind o und u zwey einseitige innere Winkel zwischen den Parallelen CA und DB, folglich o + u = 180°. Also muß o + x = o + u seyn wegen §. 104., also wegen §. 106. x = u seyn (I.)

Eben so muß
u + y = 180° seyn, wegen 1) u. §. 174

ferner u + o = 180° seyn, wegen 2) u. §. 174
——————— §. 104.
u + y = u + o
——————— §. 106.
y = o (II.)

§. 194.

§. 194.

Lehrsatz.

Soll ein Parallelogramm irgend einen rechten Winkel haben; so müssen auch alle seine 3 übrigen Winkel rechte Winkel werden.

§. 195. Zeichnung 45.

Beweis.

Gesetzt, daß o ein rechter Winkel, folglich nach §. 860 = 90° werden sollte; so müste auch x = 90° werden; weil nach §. 174 o+x = 180° seyn muß, wenn AB || CD seyn soll. Dem Winkel o aber ist sein gegenüberstehender y, und dem x sein gegenüberstehender u gleich. §. 192.

§. 196. Zeichnung 46.

Erklärung. Ein rechtwinkliges Parallelogramm heißt ein Rechteck.

§. 197.

Erklärung. Jede gerade Linie, welche zwey Winkel einer Figur und ihre Fläche in zwey Theile zertheilt, heißt eine Diagonale.

In jedem Parallelogramme Zeichnung 47 finden zwey Diagonalen Statt: die eine ist AD, die andere wäre die gerade Linie von B nach C

§. 198.

§. 198. Zeichnung 47.

Lehrsatz.

Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in 2 sich deckende Dreyecke getheilt.

§. 199.

Beweis.

Es ist die Diagonale
AD = AD
Da nun s = n nach §. 190 u. §. 176. no. 1
und m = t nach §. 190 u. §. 176. no. 1
so ——— §. 122
muß $\triangle ADC \cong \triangle ADB$

§. 200. Zeichnung 38.

Folgerung 1. Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich oder in jedem Parallelogramm sind die gegenüberstehenden Seiten AB und CD, desgleichen BD und AC einander gleich: weil sie gleichliegende Seiten in zwey Dreyecken sind, die einander decken können.

§ 201. Zeichnung 38.

Folgerung 2. Der Flächenraum eines Parallelogrammes wird durch die Diagonale in zwey gleiche Theile zerschnitten. §. 114 no. I.

§. 202. Zeichnung 47.

Lehrsatz.

Jede viereckige Figur, worin die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, ist ein Parallelogramm. Ich sage, wenn 1) AB = CD und 2) AC = BD; so muß auch AB || CD und AC || BD seyn.

§. 203.

Beweis.

Man ziehe die Diagonale AD; so hat

man AD = AD
AB = DC, die 1te } Bedingung des
BD = CD, die 2te } Lehrsatzes.
——————— §. 136.

△ABD ≌ △BCD
——————— §. 120.

n = s und t = m.
—— §. 159 —— §. 159
AB || CD BD || AC

§. 204. Zeichnung 6.

Practische Anwendung.

Deshalb müssen die so genannten Parallellineale bey jeder Verschiebung parallel bleiben,

ben: denn die Puncte, worum sich ein solches Instrument verschieben kann, stellen die vier Eckpuncte eines Viereckes ABCD vor, dessen gegenüberstehende Seiten bey jeder Verschiebung gleich bleiben.

§. 205. Zeichnnng 45.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm zu verzeichnen.

§. 206.

Auflösung.

Legt die zwey Seiten CB und CD, jede so lang oder so kurz als ihr sie haben wollt, unter dem beliebigen Winkel o an einander und ziehet entweder:

1. Durch den Endpunct B die der CD parallele AB, und durch den Endpunct D die der CA parallele DB; denn wenn sich beyde Parallelen in B schneiden, so erhaltet ihr eine viereckige Figur ABCD die nach §. 191 ein Parallelogramm seyn muß: oder

2. Beschreibt euch über die bloß in Gedanken gezogene AD das Dreyeck ABD dergestalt daß AB = CD und BD = AC werde; so

muß

muß das so entstandene Viereck ABCD nach §. 202. ein Parallelogramm seyn.

§. 207.

Zusatz 1.

Wollt ihr ein Rechteck (§. 169) haben, so habt ihr nur den Winkel o = 90° zu machen (nach §. 147) und übrigens das Parallelogramm ABCD nach der 1. oder 2. Art in §. 206. zu vollenden.

§. 208.

Zusatz 2.

Wollt ihr ein Quadrat haben; so habt ihr nicht nur o = 90°, sondern auch CD = CA zu machen, und übrigens wie §. 207. zu verfahren: denn

§. 209. Zeichnung 43.

Erklärung. Ein Quadrat ist ein Rechteck von 4 gleichen Seiten.

§. 209.

Anmerkung. Ein Quadrat hat also nicht nur lauter gleiche und zwar rechte Winkel wie jedes Rechteck oder rechtwinklige Parallelogramm, sondern auch lauter gleiche Seiten.

Ein Parallelogramm, worin zwar alle Seiten, aber nicht alle Winkel, folglich §. 192. nur die gegenüberstehenden einander gleich sind (Zeichnung 42.) heißt eine Raute. Manche nennen es auch ein verschobenes Quadrat; aber eine Figur, die wegen der Ungleichheit ihrer Winkel überhaupt kein Quadrat ist, verdient auch den Nahmen eines verschobenen Quadrates nicht.

§. 211.

Erklärung.

Ein Quadrat, worin jede Seite eine Elle lang ist, heißt eine Quadrat-Elle. Und Quadrat-Ruthen, Quadrat-Schuhe, Quadrat-Scrupel oder Quadrat-Meilen sind solche Quadrate, worin jede Seite eine Ruthe, einen Schuh einen Scrupel oder eine Meile lang ist.

§. 212.

Folgenden Zeichen $5^{\square\square}$ $18^{\square\prime}$ $29^{\square\prime\prime}$ $40^{\square\prime\prime\prime}$ $99^{\square\prime\prime\prime\prime}$ bedeuten 5 Quadrat-Ruthen, 18 Quadrat-Schuh, 29 Quadrat-Zoll, 40 Quadrat-Strich, 99 Quadratscrupel.

§. 213. Zeichnung 39.

Folgerung.

Wenn ABED ein Quadrat-Zoll ist; so hält jede Seite, wie AB einen Zoll *) oder 10 Strich, und es haben demnach über der Linie AB auch 10 Quadrat-Strich neben einander Platz. Solche Streifen von 10 Quadrat-Strichen haben im ganzen Quadrate 10 über einander Platz. Der ganze Quadrat-Zoll hält demnach nicht 10, sondern 10mahl 10, d. i. 100 Quadrat-Striche, und umgekehrt ist 1 Quadrat-Strich der 100ste Theil von einem Quadrat-Zolle.

Zeichnet euch einen Quadrat-Schuh, so werdet ihr auf die nähmliche Weise ersehen,

*) AB ist kein geometrischer Rheinländischer Zoll wie FG in der 7ten Zeichnung; sondern der 10te Theil eines rheinländischen Duodecimal-Schuhes, also ein Decimal-Zoll eines Rheinländischen Duodecimal-Schuhes. Wir haben der AB diese Länge gegeben, theils weil es an Platz fehlte, um sie dem eigentlichen geometrischen Zolle gleich zu nehmen; theils weil dergleichen Zoll auch auf den Maßstäben in manchen Reißzeugen unter dem Nahmen R. Gem. Geomet. d. h. Rheinländisch gemein geometrisches Maß vorkommt. Solcher Zoll ist also der 120ste Theil einer Rheinländischen Ruthe, da hingegen der eigentliche geometrische Zoll der 100te Theil der Ruthe ist.

daß $1^{\square'}$ gerade $100^{\square''}$ in sich faßt, obgleich $1'$ d. i. im Längenschuh nur $10''$ d. i. 10 Längenzolle enthält. Aus beyden Beyspielen werdet ihr leicht abnehmen, daß eben so $100^{\square'}$ auf $1^{\square\circ}$ gehen müssen, und daß $1^{\square'''}$ wiederum $100^{\square''''}$ enthalten müsse.

§. 214.

Fortsetzung.

Da nun $1^{\square\circ} = 100^{\square'}$
und jeder einzele $^{\square'}$ wiederum $100^{\square''}$ enthält, so muß $1^{\square\circ} = 100 . 100 = 10000^{\square''}$ seyn. Da ferner jeder einzele $^{\square''}$ wiederum $100^{\square'''}$ enthält; so muß $1^{\square'} = 10000 . 100 = 1000000^{\square'''}$ und wiederum 100mahl so viel $^{\square''''}$ also $100000000^{\square''''}$ gleich seyn.

Also besteht folgende Größe		
von	$58226^{\square'''}$	
1) aus	$26^{\square'''}$	
und 2) aus	$8200^{\square'''}$	oder $82^{\square''}$
und 3) aus	$50000^{\square'''}$	oder $500^{\square''}$ oder $5^{\square'}$
und die Größe	$58226^{\square'''}$	ist demnach
so viel als	$5^{\square'}\ 82^{\square''}\ 26^{\square'''}$.	

Eben so ist folgende Größe $6980|03|42^{\square''}$
so viel als $6980^{\square\circ}\ 3^{\square'}\ 42^{\square''}$.

Der Unterschied zwischen dem Reduciren des Längenmaßes in §. 28. und dem eben ge-

zeigten

zeigten Reduciren des Quadrat-Maßes wird aus folgendem Beyspiele völlig deutlich werden.

Die Menge von $18962\;26''$ würde
abgetheilt in $6''$
und $2\;0''$
und $18962\;0\;0''$
so viel seyn als $18962^{\circ}2'6''$; weil $20'' = 2'$
und $200'' = 2^{\circ}$ sind.
Hingegen würde $18962\;26^{\square''}$ abzutheilen
seyn in $26^{\square''}$
und $6200^{\square''}$
und $1890000^{\square''}$ folglich so
viel seyn als $189^{\square'}62^{\square'}26^{\square''}$; weil nicht $20^{\square''}$, sondern erst $200^{\square''} = 2^{\square'}$ sind, also $6200^{\square''}$ auch $= 62^{\square'}$ sind, u. s. w.

§. 215.

* Anmerkung. Beym Duodecimal-Maße hält 1 Quadrat-Ruthe nicht 10 mahl 10 sondern 12 mahl 12 Quadrat-Schuh; ein Quadrat-Schuh wiederum $12 \,.\, 12^{\square''}$; ein Quadrat-Zoll wiederum $12 \,.\, 12^{\square'''}$ u. s. w. Dabey ist also $1^{\square\circ} = 144^{\square'} = 1728^{\square''} = 20736^{\square'''}$ u. s. w.

§. 216.

Aufgabe.

Ein Rechteck auszumessen, das heißt, die Anzahl von den Quadrat-Maßen zu finden welche

che im Rechtecke Platz haben, es mögen nun Quadrat-Ruthen oder-Schuhe oder-Zolle oder-Striche oder Quadratscrupel seyn, je nachdem es nöthig oder bequem ist.

§. 217. Zeichnung 41.

Vorbereitung.

Da des Rechteckes ABDC eine Seite AB gerade 4‴ hält, so müssen längst der AB gerade 4□‴ neben einander im Rechtecke Platz haben, und diese Streife von 4 Quadrat-Strichen muß von des Rechteckes Seite AC gerade einen Strich von A bis 1 einnehmen. Da nun die ganze Seite AC gerade 3 Strich hält, so müssen 3 solche Streifen von 4□‴, folglich 3 mahl 4□‴, d. i. 12□‴ im ganzen Rechtecke Platz haben.

Wären AB und AC gerade 10 mahl grösser als sie sind, folglich AB = 4″ und AC = 3″; so müsten im ganzen Rechtecke AD gerade 3 . 4□″ = 12□″ Platz haben.

Wäre AB und AC 100 mahl so groß als sie sind, folglich AB = 4′ und AC = 3′ so würden in dem Rechteck AD gerade 12□′ Platz haben.

Im Rechtecke ABFE kann zwar die Seite AB wie vorher nach Strichen gemessen werden,

den, indem sie 4 ganze Striche enthält; aber die Nebenseite AE hält ausser den 3 ganzen Strichen AC noch 2 Scrupel CE und kann daher nur von ganzen Scrupeln gemessen werden. In solchen Fällen muß man beyde Seiten, die AB sowohl als die AE, nach Scrupeln angeben. Da nun $AB = 40''''$, so findet längst AB eine Streife von $40^{\square''''}$ Platz, und da die Seite AE gerade $32''''$ enthält, so haben 32 solche Streifen von $40^{\square''''}$ in der Fläche des ganzen Rechteckes Platz, und dieses enthält demnach $40 \,.\, 32^{\square''''} = 1280^{\square''''}$.

Wären die Seiten AB und AE tausendmahl größer, also $AB = 4^{\circ}$ und $AE = 3^{\circ}2'$ so müßte man schließen: da $AB = 40'$ und $AE = 32'$, so haben im Rechtecke AF gerade $32 \,.\, 40^{\square'} = 1280^{\square'}$ Platz.

Aus diesen Beyspielen ergibt sich folgende

§. 218.

Auflösung.

Findet durch Messung nach einem beliebigen Maßstabe die beyden Zahlen, welche zwey Nebenseiten des Rechteckes nach Maße von einerley Nahmen, z. B. beyde nach lauter Schuhen, oder beyde nach lauter Zollen u. s. w. angeben; das Product aus beyden Zahlen gibt

die

die gleichnahmigen Quadrate an, welche im Rechtecke Platz haben.

§. 219.

Beweis.

Aus dem Verfahren selbst erhellet sogleich, daß die darnach gefundene Menge von Quadraten die ganze Fläche des Rechteckes genau bedecken muß.

§. 220.

Zusatz.

Wer jedes Rechteck auszumessen weiß, kann gewiß auch jedes Quadrat ausmessen; weil ein Quadrat nichts anders als ein Rechteck von gleichen Seiten ist. Man hat also dabey noch den Vortheil, daß man nur eine Seite zu messen braucht, und die Zahl dieser Seite durch sich selbst multipliciren kann.

Z. B. Die Seite des Quadrates bey der 40sten Zeichnung sey $= 13''''$ so hält seine Fläche $13 . 13 = 169^{\square''''}$.

Wenn eines Quadrates Seite

$= 2'$ ist, so hält seine Fläche			$2 . 2 =$	$4^{\square'}$
$= 3'$	—	—	$3 . 3 =$	$9^{\square'}$
$= 4''$	—	—	$4 . 4 =$	$16^{\square''}$
$= 10^{\circ}$	—	—	$10 . 10 =$	$100^{\square\circ}$

Des=

Deshalb pflegt man
die Zahl 4, als das Product aus 2 . 2, die
Quadrat=Zahl von 2,
die Zahl 9, als das Product aus 4 . 4, die
Quadrat=Zahl von 3,
die Zahl 16, als das Product aus 4 . 4, die
Quadrat=Zahl von 4, u. s. w.
die Zahl 10, als das Product aus 10 . 10, die
Quadrat=Zahl von 10, u. s. w.
zu nennen. Hingegen heißt 2 die Quadrat=Wurzel von 4, 3 die Quadrat=Wurzel von 9 u. s. w.

Man wiederhole hier nochmahls die Sätze von §. 213 bis §. 214.

§. 221. Zeichnung 38.

Vorbereitung.

Obgleich der Baum ED kürzer ist als der Baum FA; so ist doch ED eben so hoch als FA. Denn wer auf den Baum FA bis A hinanklettern wollte, würde nicht höher stehen als wer auf dem kürzern Wege ED bis D geklettert wäre, weil der beyden Spitzen D und A Entfernungen von dem Erdboden, oder die beyden aus D und A auf den Erdboden gefällten Normal=Linien DE und AG einander gleich sind.

§. 222. Zeichnung 37.

Erklärung.

In einem Parallelogramme erhalten zwey von dessen gegenüberstehenden Seiten, die man nach Belieben wählen kann, den Nahmen der Grundlinien; und jede Linie die man alsdann aus einem beliebigen Puncte der einen Grundlinie auf die andere Grundlinie oder auf deren Verlängerung normal fället, giebt des Rechteckes Höhe an. Z. B.

Im rechtwinklichen Parallelogramm EFCD seyen EF und DC die Grundlinien, so wird jede der beyden andern Seiten DE und CF die Höhe des Rechteckes angeben.

Im Parallelogramme CFAB seyen EF und BA die Grundlinien, so gibt z. B. die aus dem Puncte A auf die verlängerte EF gefällte Normale AG die Höhe des Parallelogrammes an.

Es ist übrigens gleich viel, aus welchem beliebigen Puncte der einen Grundlinie man die Normale fallen läßt; wegen des folgenden Lehrsatzes.

§. 223.

§. 223. Zeichnung 36.

Lehrsatz.

Alle Normalen zwischen Parallellinien sind einander gleich.

§. 224.

Beweis.

Wenn sowohl EF als GH auf CD normal stehen; so sind die beyden innern Winkel m und n rechte Winkel, folglich ist m + n = 180° folglich §. 157. FE ‖ HG seyn. Da nun auch EG und FH parallel liegen, so ist die Figur EGHF ein parallelogramm, worin nach §. 200. die gegenüberstehenden Seiten EF und HG einander gleich seyn müssen.

§. 225. Zeichnung 37.

Lehrsatz.

Der Flächenraum eines jeden Parallelogrammes EFAB ist dem Flächenraume eines jeden andern (also auch des rechtwinkligen) Parallelogrammes EFCD gleich, welches mit ihm einerley Grundlinie EF hat, und mit ihm

zwischen

zwischen einerley Parallelen EF und DA lieget, folglich (nach §. 222 und 223.) auch gleiche Höhe AG = DE hat.

Beweis.

1) Kurze Uebersicht. Von den beyden gleichen Dreyecken DEB und CFA denke man sich das beyden gemeinschaftliche Dreyeck CHB weg; so muß das 1ste Viereck DEHC (welches vom Dreyecke DEB übrig bleibt) so groß seyn als das 2te Viereck HFBA (welches vom Dreyecke CFA übrig bleibt). Denkt man sich nun mit dem 1sten Viereck DEHC das Dreyeck EHF in eine Figur vereinigt, so erhält man das (rechtwinklige) Parallelogramm EFCD: und denkt man sich zu dem 2ten eben so großen Viereck HFBA das nähmliche Dreyeck EHF hinzu, so erhält man das Parallelogramm EFAB; und man übersiehet, daß wegen §. 185. beyde Parallelogramme gleich groß seyn müssen.

2) Vollständige Auseinandersetzung.

Nach §. 191. ist im Parallelogr. EC
die ED || der FC folgl. ∠(o+u) = ∠(n+y)
§. 176. No. 2.
und im Parallelog. EA
die EB || der FA folglich ∠u = ∠y nach
§. 176. No. 2.
folgl. ———————— §.106
∠o = ∠n

Nun ist im Parallelog. EC die Seite DE = FC §. 200
und im Parallelog. EA die Seite EB = FA §. 200
———————— §. 115
△DEB ≌ △CFA

folgl. §. 117. No. 7. ————————

der Flächenraum △DEB = Flr. △CFA
Nun ist der Flächenraum △CHB = Flr. △CHB
———————— §. 106
Flächenraum DEHF = Flr. FHBA
Da nun Flächenraum △EHF = Flr. △EHF
———————— §. 185
Flächenraum DEFC = Flr. EFAB.

§. 226. Zeichnung 37.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm auszumessen.

Auf-

Auflösung und Beweis.

Das Product aus den beyden Zahlen, welche des Parallelogrammes EA Grundlinie EF und Höhe AG nach Längenmaße von einerley Nahmen ausdrücken, gibt die Anzahl der Quadrat-Maße von gleichem Nahmen an, deren Flächen zusammen genommen eben so groß sind, als die Fläche des Parallelogrammes EA Denn dies Product aus den Zahlen der Linien EF und AG ist, weil nach §. 223. AG = DE ist, gleich dem Producte aus den gleichnahmigen Zahlen der Linien EF und ED, welches den Flächenraum des Rechteckes EC folglich nach §. 225. auch das Parallelogrammes EA angibt.

Z. B. Es sey EF = 22‴ AG = ED = 28‴, so gibt das Product aus den beyden Linien EF und AG, das heißt, aus den beyden Zahlen 22 und 28, wodurch diese Linien nach einerley Maße ausgedrückt werden, nähmlich 616, die Quadrate des Rechteckes EC, folglich auch des Parallelogrammes EA an.

§. 227.

Erklärung. Die beyden Zahlen welche die Grundlinie und die Höhe eines Parallelogrammes nach Maße von einerley Nahmen angeben,

geben, sollen die Grund- und die Höhenzahl des Parallelogrammes genannt werden.

§. 228. Zeichnung 48.

Erklärung.

Nachdem man in einem Dreyecke irgend eine beliebige Seite zur Grundlinie angenommen hat; so wird die Höhe des Dreyeckes durch die gerade Linie bestimmt, welche aus der Spitze des Winkels, welcher der Grundlinie gegenüberstehet, auf die Grundlinie selbst oder ihre gehörige Verlängerung normal stehet.

Z. B. Wenn im Dreyecke ABC die Seite AB zur Grundlinie angenommen wird; so ist CD die Höhe. Wenn aber (Z. 49) die Seite AC zur Grundlinie angenommen würde, so wäre BG die Höhe des Dreyeckes ABC.

§. 229.

Zusatz.

Die Grund- und die Höhenzahl eines Dreyeckes sollen die beyden Zahlen heissen, wodurch die Längen der Grundlinie und der Höhe nach Maße von einerley Nahmen angegeben werden.

§. 230. Zeichnung. 48.

Lehrsatz.

Der Flächenraum eines Dreyeckes ABC ist die Hälfte von dem Flächenraume des Parallelogrammes ACFB welches mit ihm einerley Grundlinie AB und einerley Höhe CD hat.

§. 231.

Beweis.

Wenn AB die Grundlinie seyn soll, so beschreibe man über einer von den beyden übrigen Seiten, z. B. über der CB ein Dreyeck CFB worin CF=BA und BF=CA wird, daß eine vierseitige Figur ACFB entstehet, deren gegenüberstehende Seite CF und AB desgleichen BF und AC einander gleich sind. Diese vierseitige Figur ACFB ist nach §. 202. ein Parallellogram, von dessen Flächenraume das Dreyeck ABC die eine Hälfte einnimmt nach §. 201.

§. 232. Zeichnung 49.

Zusatz.

Eben so wäre auch, wenn man die AC zur Grundlinie annehmen wollte, das △ ACB die Hälfte des Parallelogrammes ACBF welches mit dem △ ACB einerley Grundlinie AC und einer-

einerley Höhe BG hat, und welches entstehet wenn man AF = BC und BF = AC macht.

§. 233. Zeichnung 48.

Aufgabe.

Jedes (geradelinige) Dreyeck auszumessen.

§. 234.

Auflösung und Beweis.

Messet die nach Belieben angenommene Grundlinie und die ihr zugehörige Höhe nach Maße von einerley Nahmen. Das halbe Product aus den dadurch gefundenen Grund- und Höhenzahlen (§. 229.) ist die Anzahl der gleichnahmigen Quadrate, deren Flächenräume zusammen genommen, eine Fläche ausmachen, welche eben so groß ist, als die Fläche des Dreyeckes. Denn das ganze Product aus diesen Zahlen, z. B. der AB und CD Zeichnung 48. (oder der AC und BG Zeichnung 49.) würde nach §. 226 den Flächenraum des Parallelogrammes ABFC (oder AFBC in Zeichn. 49) angeben, dessen Hälfte das Dreyeck ACB ist §. 230. (oder §. 232.)

Z. B. Es ist AB = 57‴ und DC = 24‴ also ist $\frac{1368^{\square'''}}{2} = 684^{\square'''}$ der Flächenin-

halt des Dreyeckes ABC. In Zeichn. 49. ist AC $= 29\frac{1}{2}'''$ und BG $= 46'''$ also wird der Flächeninhalt $= \frac{1357^{\square''''}}{2} = 678\frac{1}{2}^{\square''''}$, fast wie vorhin gefunden. Der kleine Unterschied rührt bloß daher, daß man bey der Abmessung der Linien fast immer um einige kleine Theilchen fehlet, die sich dem Auge entziehen.

§. 235.

Anmerkung 1. Das halbe Product aus der Grund- und Höhenzahl wird auch gefunden, wenn man die ganze Grundzahl durch die halbe Höhenzahl, oder auch die halbe Grundzahl durch die ganze Höhenzahl multiplicirt. Läßt sich nun die Hälfte von der Grund- oder Höhenzahl in ganzen Zahlen angeben, so ist diese Berechnungsart leichter, als wenn man erst das ganze Product suchet und davon die Hälfte nimmt.

Z. B. $92\frac{1}{2} \cdot \frac{46}{2}$ d. i. $29\frac{1}{2} \cdot 23$ gibt $678\frac{1}{2}$.

§. 236.

Anmerkung 2. Zur Grundlinie kann man freylich eine beliebige Seite wählen; indessen werden doch die kleinen Fehler bey der Ausmessung größten Theils leichter vermieden, wenn man die längste Seite des Dreyeckes zur Grundlinie annimmt.

§. 237.

Practische Anmerkung.

Auf dem Felde ist es bisweilen sehr mühsam, die Höhe CD zu finden, man sehe davon §. 151. Für solche Fälle wollen wir im Anhange eine Regel geben, wonach man den Flächeninhalt eines Dreyecks aus seinen drey Seiten berechnen kann, ohne daß man nöthig hat, seine Höhe zu messen. Wer aber ein Dreyeck auszumessen weiß, der kann mit einem jeden Felde fertig werden, wie das gleichfolgende lehren wird.

§. 238.

Aufgabe.

Jede geradelinige Figur auszumessen, sie mag so viele Seiten haben, als sie nur immer will.

§. 239. Zeichnung 50.

Auflösung und Beweis.

Jede geradelinige Figur läßt sich durch gehörig gezogene Diagonalen in lauter Dreyecke zertheilen z. B. das Fünfeck ABCDE durch die Diagonalen EB und EC in die drey Dreyecke 1) EAB 2) EBC und 3) ECD. In jedem

dieser Dreyecke nimmt man eine Seite zur Grundlinie an; und es kann z. B. die Seite BE für die beyden ersten Dreyecke, für das dritte aber die Seite ED zur Grundlinie dienen. Auf diese Grundlinien läßt man die Höhen AF, CG und CH fallen; so kann man nach §. 234 die Flächeninhalte der einzelen Dreyecke finden, deren Summe den Flächeninhalt der ganzen Figur angeben muß; weil alle Theile einer Größe zusammen genommen, allemahl die ganze Größe ausmachen.

§. 240. Zeichnung 50.

Practischer Zusatz.

Ein geradeliniges Feld EABCD kann ebenfalls durch solche Zertheilung in Dreyecke, besonders mit Hülfe der Regel im Anhange ausgemessen werden: und wenn das Feld eben ist und man daher die geraden Linien genau messen kann; so wird diese Meßart genauer ausfallen, als irgend eine andere, wozu die Sätze von der Aehnlichkeit der Dreyecke u. d. mehrere Gründe darbieten, die man aber besonders bey sehr großen und unebnen Feldern allerdings wählen muß.

§. 241. Zeichnung 51.

Fortsetzung.

Hat man ein Feld, eine Wiese u. d. auszumessen, in dessen Umfangslinie krumme Theile vorkommen, wie zum B. in AqCDhEFG; so suchet man dennoch solche geradelinige Dreyecke darin anzunehmen, die man ohne merklichen Fehler Statt der krummlinigen Theile messen kann.

Wenn dabey ein zuerst angenommenes geradeliniges Dreyeck AFD noch gar zu sehr von dem krummlinigen Theile FiEHD abweichet, so nimmt man neue Dreyecke z. B. FED zu Hülfe, wovon das krummlinige Feld nur noch um die kleinen Stückchen FiE und EhD verschieden ist. Dergleichen kleine Flächen kann man alsdann nach dem Augenmaße schätzen, und zu dem geradelinigen Dreyeck FED hinzu rechnen, wie FiE, oder davon abziehen, wie EhD.

Sehr oft aber bleiben noch Abweichungen von den geradelinigen Dreyecken übrig, die zu unbequem liegen, als daß man sie mit einem Mahle übersehen und nach dem Augenmaße schätzen könnte, und gleichwohl zu unbeträchtlich sind, als daß man ihretwegen mehrere neue Dreyecke annehmen und messen wollte, z. B. der Rest AopqxyCA. In solchem Raume

kann

kann man sich nun mehrentheils dergleichen kleine Theile gedenken, als durch die kleinen Linien mo, np u. s. abgeschnitten werden.

Einige von diesen Theilen können als Dreyecke berechnet werden z. B. Amo, die die Grundlinie wäre Am, die Höhe mo: Andere kommen einem Parallelogramme näher, z. B. styx; einem Parallelogramme nähmlich, dessen Grundlinie st, und dessen Höhe das Mittel zwischen sx und ty wäre. Der Hauptvortheil besteht darinn, daß man die kleinen Grundlinien sogleich auf der Meßkette abmißt, als diese zur Messung der AC angezogen ist, und daß man die Länge der kleinen Höhen, der kleinen auf AC normalen Linien ty, sx u. s. w. durch eine angelegte Meßstange von etwa 5 bis 10 Schuh, in der Geschwindigkeit überschlägt und abmißt.

§. 231. Zeichnung 14.

Practische Aufgabe.

Aus der gemessenen Länge des Durchmessers AB in einem Kreise die Länge des Umkreises AEBDA zu finden.

§. 242.

Auflösung.

Aus Gründen, die wir hier nicht beybringen können, ist es erwiesen und berechnet, daß jeder

jeder Umkreis nicht mehr und nicht weniger als 314 Hunderttheile seines Durchmessers lang ist.

Wäre nun z. B. der Durchmesser = 6'', so wäre ein Hunderttel davon = $\frac{6''}{100}$; und dieses Hunderttel des Durchmessers 314 Mahl genommen gäbe $\frac{314 \cdot 6}{100} = \frac{1884''}{100} =$ 18'' $\frac{84''}{1000} =$ 18'' + $\frac{8''}{10}$ + $\frac{8}{100}''$ = 18'' 8''' 4'''', als die Länge der Linie, welche man erhielte, wenn man den Umkreis in eine gerade Linie biegen wollte.

§. 243.

*Anmerkung 1. Ich habe mit Fleiß gesagt, daß der Umkreis nicht mehr als 314 Hunderttel des Durchmessers lang ist: denn etwas länger ist er, und zwar noch etwas mehr als um ein Tausendtel des Durchmessers länger. Hätte man einen so grossen Kreis zu berechnen, daß dies Tausendtel des Durchmessers noch eine beträchtliche Größe wäre; so könnte man wenigstens dies Tausendtel mit dazu rechnen. Die alsdann ferner noch übrig bleibenden 5 Zehntausendtel und 9 Hunderttausendtel des Durchmessers u. s. w. werden nur selten in Betrachtung kommen.

§. 244.

Anmerkung 2. Man pflegt auch nach der gewöhnlichen Regel de tri zu rechnen auf folgende Weise:

ein Durchmesser von 100 Zollen	hätte	:	einen Umkreis von 6 Zollen.	=	ein Durchmesser von 6 Zollen	hat :	in seinem Durchmesser, wie viel Zoll?

Antwort: 6 Zoll multiplicirt durch 314 und dividirt durch 100, d. i. 18 $\frac{84}{100}''$

*Will man die nach Anmerkung 1. noch übrigen Tausendtheile mit in Rechnung bringen, z. B. bey einem Kreise, dessen Durchmesser 3 Meilen lang wäre; so rechnet man:

ein Durchmesser von 1000 Meilen	hätte	∻	einen Umkreis von 3141 Meilen.	=	Ein Durchmesser von 3 Meilen	hat ∻	in seinem Durchmesser, wie viel Meilen?

§. 124.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Kreises zu finden.

§. 129.

Auflösung.

Man suche das Längenmaß des Umkreises nach §. 242 oder 244. und drücke die Länge des halben Halbmessers nach gleichnahmigem

Ma=

Maße aus; das Product aus diesen Zahlen des Umkreises und des halben Halbmessers gibt die Menge von gleichnahmigen Quadraten an, deren Flächenraum zusammen genommen, dem Flächenraume des Kreises gleich kommt.

Z. B. der Durchmesser eines Kreises sey $= 6''$ so findet man seinen Umkreis $= 18'' \; 8''' \; 4'''' = 1884''''$. Der halbe Halbmesser ist $= 1\frac{1}{2}'' = 1'' \; 5''' = 15''' = 150''''$: folglich ist $1884''''. \; 150 = 244200^{\square''''} = 24^{\square''} \; 42^{\square'''}$ der Flächeninhalt des Kreises.

Beweis.

§. 247. Zeichnung 13.

Denkt euch den Ausschnitt $C\alpha\beta$ so klein, daß sein Bogen $\alpha\beta$ nur der 1000te Theil des ganzen Umkreises sey; so kann dieser kleine Bogen $\alpha\beta$ ohne merklichen Fehler für eine gerade Linie, folglich $C\alpha\beta$ für ein geradeliniges Dreyeck gelten, dessen Grundlinie $\alpha\beta$ und dessen Höhe $C\delta$, ein Halbmesser des Kreises wäre. Die Zahl von $\alpha\beta$ etwan in Scrupeln ausgedrückt und die Zahl des halben Halbmessers $\frac{r}{2}$ ebenfalls nach Scrupeln ausgedrückt würden also in einander multiplicirt: nach §. 234 den Flächeninhalt dieses kleinen Dreyecks in Quadratscrupeln angeben, oder es wäre das $\triangle C\alpha\beta = \frac{\alpha\beta . r}{2}^{\square'''}$. Solcher Dreyecke müssen nun gerade

1000 im ganzen Umkreise enthalten seyn, eben darum, weil $\alpha\beta$ der tausendste Theil des ganzen Umkreises ist. Folglich ist der Flächeninhalt des Kreises $= 1000 . \alpha\beta . \frac{r^{\square''''}}{2}$, oder weil $1000 . \alpha\beta = u$ ist, wenn u den Umkreis bedeutet; so ist $u . \frac{r^{\square''''}}{2}$ der Flächeninhalt dieses Kreises.

Seyd ihr noch wegen des Fehlers besorgt, daß man $\alpha\beta$ für eine gerade Linie gelten läßt, da dieser Bogen $\alpha\beta$, so klein er auch seyn mag, doch keine gerade, sondern eine krumme Linie ist; so denkt euch $\alpha\beta$ nicht als den 1000sten, sondern als den millionsten Theil des Umkreises. Ihr erhaltet alsdann nach den nähmlichen Schlüssen, daß die Kreisfläche $= 1000000 . \alpha\beta \frac{r^{\square''''}}{2}$ seyn muß; und $1000000 . \alpha\beta$ ist nun wie vorher = dem Umkreise u, weil $\alpha\beta$, jetzt der millionste Theil des Umkreises, million Mahl genommen, eben sowohl den ganzen Umkreis geben muß, als da es den 1000sten Theil des Umkreises bedeutete, und 1000 Mahl genommen wurde.

Eben so könnt ihr euch $\alpha\beta$ als den billionsten, trillionsten u. s. w. Theil des Umkreises den=

denken, und ihr werdet beständig auf denselben Satz kommen, daß die Zahl des ganzen Umkreises mit der Zahl seines halben Halbmessers multiplicirt, den Flächeninhalt des Kreises angibt.

Anhang.

Den Flächeninhalt eines Dreyeckes aus den Maßen seiner drey Seiten durch Rechnung zu finden. Man sehe §. 237.

---

§. 249.

Wer die Zeichen der Buchstabenrechnung versteht, kann die ganze Regel aus folgender Formel sehr geschwinde übersehen.

Wenn a, b, c die drey Seiten eines Dreyecks angeben, und $s = \frac{a+b+c}{2}$ ist; so ist des Dreyeckes Flächeninhalt = $(s-a)\ (s-b)\ (s-c)\ s$.

Die Richtigkeit dieser Regel kann aus der Auflösung jener Aufgabe dargethan werden, worauf wir uns schon in §. 152 berufen musten.

In

In Saunderson's elemens d'Algèbre pag. 141 findet man sie ebenfalls algebraisch erwiesen.

§. 250.

Vorerinnerung.

I. Zum Besten deretjenigen, welche mit den Quadrat-Wurzeln und den Decimal-Brüchen nicht hinlänglich bekannt sind, habe ich noch folgendes voranzuschicken.

Man weiß die Quadrat-Wurzel einer vorhabenden Zahl, wenn man eine Zahl anzugeben weiß, welche durch sich selbst multiplicirt die vorhabende Zahl gibt.

Von den Zahlen 1; 4: 9; 16; 25 sind also folgende Zahlen 1; 2; 3; 4; 5 die Quadrat-Wurzeln; weil 1 mahl 1 = 1; 2 mahl 2 = 4; 3 mahl 3 = 9 ist u. s. w.

II. Die Quadrat-Wurzeln von 2 und 3 müssen also grösser als 1 und kleiner als 2 seyn; und eben so müssen die Quadrat-Wurzeln aus den Zahlen 5, 6, 7, 8 zwischen die ganzen Zahlen 2 und 3 fallen. In der That kann man auch durch Brüche, welche zwischen die genannten ganzen Zahlen fallen, und sogar durch lauter 10tel, 100tel, 1000tel u. s. w. diese Wurzeln allemahl so genau angeben, als als man es zu irgend einem practischen Gebrauche nöthig hat.

So

So kann man z. B. die Zahl $1\frac{41}{100}$ ohne großen Fehler als die Quadratwurzel von 2 gebrauchen. Multiplicirt man zur Probe diese Zahl durch sich selbst; so erhält man freylich zum Producte nicht ganz genau die Zahl 2, wie es geschehen müste, wenn diese angegebne Zahl die ganz vollkommene Wurzel von 2 wäre: sondern man erhält das Product $1\frac{9881}{10000}$ welches um $\frac{119}{10000}$ kleiner ist als 2.

IV. Gesetzt also, ihr wolltet ein Stück Acker in der Form eines Quadrates abstecken, welches gerade $2^{\square\circ}$ enthalten sollte, und machtet nun ein Quadrat, worin jede Seite $1\frac{41}{100}{}^{\circ}$ d. i. $1^{\circ}\ 4'\ 1''$ lang wäre; so würde freylich dies Quadrat nicht genau $2^{\square\circ}$ halten, sondern um $\frac{119}{10000}{}^{\square\circ}$, d. i. um $119^{\square''}$, also um $1^{\square'}$ und $19^{\square''}$ zu klein werden. Diese Unrichtigkeit ist euch vielleicht unangenehm. Aber was könnte es euch helfen, wenn ich euch auch das Maß von der Seite eures gewünschten Quadrates noch genauer berechnen, und euch sagen wollte, daß ihr diese Seite noch um $4'''$ länger, also $1^{\circ}4'\,1''\,4'''$ lang machen müstet, um ein Quadrat zu erhalten, welches noch weniger von $2^{\square\circ}$ abweichet; denn ihr könntet ja doch auf dem Felde nicht so genau messen, daß ihr auf diese $4'''$ Rücksicht zu nehmen hättet. Diese Betrachtung zeiget, daß es bey Vermessung der Äcker schon eine hinlängliche Genauigkeit geben kann

wenn

wenn man nur auf die Hunderttel der Quadrat-Wurzeln Acht hat, und die fehlenden Tausendtel, Zehntausendtel u. s. w. unberechnet läßt, auch da, wo von dem grösten dabey gewöhnlichen Maße, den Ruthen, die Rede ist. Darum sind die Quadrat-Wurzeln am Ende dieses Buches nur bis auf die Hunderttel angegeben.

V. Das Beschwerlichste beym Gebrauche dieser Wurzeln wäre ohne Zweifel die Rechnung mit den Brüchen; wenn man nicht einen vortrefflichen Kunstgriff erfunden hätte, wodurch man mit dergleichen Decimal-Brüchen d. i. mit 10teln, 100teln, 1000teln u. d. eben so leicht als mit ganzen Zahlen rechnen kann.

VI. Man schreibt nähmlich z. B. den Bruch $1\frac{41}{100}$ auf folgende Weise: 1,41; wobey das Komma hinter 1 anzeiget, daß nur die 1 ein Ganzes bedeutet und die Ziffern, welche hinter der 1 folgen, der Ordnung nach 10tel 100tel u. s. w. bedeuten.

Es wird also 1,41 gelesen 1 Ganzes und $\frac{4}{10}$ und $\frac{1}{100}$; und da $\frac{4}{10} = \frac{40}{100}$ folglich $\frac{40}{10} + \frac{1}{100} = \frac{41}{100}$ sind, auch sogleich gelesen 1 Ganzes und 41 Hunderttel.

VII. Will

VII. Will man nun z. B. 1, 41 durch sich selbst multipliren;

so multiplicirt man

in 1,41
durch 1,41
―――――
1 41
564
141
―――――
19981

gerade als ob man 141 durch 141 multipliciren wollte, und findet dadurch zuvörderst das Product 19981. In diesem Producte schneidet man darauf von der Rechten an gerechnet die 4 ersten Zahlen als Decimal-Bruche ab; weil in den beyden durch einander multiplicirten Factoren zusammen genommen 4 Decimal-Brüche vorkommen. Dadurch

erhält man 1, 9881

das ist 1 Ganzes $\frac{9}{10}$ $\frac{8}{100}$ $\frac{8}{1000}$ $\frac{1}{10000}$

oder 1 Ganzes $\frac{9000}{10000}$ $\frac{800}{10000}$ $\frac{80}{10000}$ $\frac{1}{100000}$

oder 1 Ganzes und 9881 Zehntausendtel, als das verlangte Product

VIII. Im §. 234 war $29\frac{1}{2}$ durch 46 zu multipliciren. Um dabey den Vortheil der Decimal-Brüche zu nutzen; so drückt man den

den Bruch $\frac{1}{2}$ durch 10tel aus. $\frac{1}{2}$ sind $\frac{5}{10}$ und

ihr habt demnach 29,5

zu multipliciren durch 46

$$\begin{array}{lr} & 1750 \\ \text{und findet} & 1180 \\ \hline \text{das Product} & 1355{,}0 \end{array}$$

das Product 1355,0 oder 1355 Ganze und 0 Zehntel.

Denn weil hier in beyden Factoren zusammen genommen, nur eine Bruchziffer, nähmlich die 5 im ersten Factor vorkommt; so hat man auch in dem Producte nur eine Ziffer abzuschneiden.

§. 251.

Nun werdet ihr die Tafeln am Ende des Buches verstehen, worin die Quadrat-Wurzeln aller ganzen Zahlen zwischen 1 und 1000 bis auf ihre Hunderttel abgedruckt sind: und wir können nunmehr die §. 249. versprochene Regel an einigen Beyspielen lehren.

§. 252.

Es sey eines Dreyeckes eine Seite = 8′, die andere Seite = 6′ und die dritte Seite = 4′; so ist die halbe Summe aus allen 3 Seiten $= \frac{8' + 6' + 4'}{2} = \frac{18'}{2} = 9'$.

Ferner ist die halbe Summe

9′ weniger der einen Seite = 1′
9′ " " andern " = 3′
9′ " " dritten " = 5′.

Nun multipliciret diese 3 Zahlen 1, 3, 5; und die halbe Summe 9 in einander; so erhaltet ihr aus diesen 4 Factoren 1 mahl 3 mahl 5 mahl 9 das Product 135: denn 1 mahl 3 gibt 3; 3 mahl 5 gibt 15 und 15 mahl 9 gibt 135.

Aus diesem Producte 135 nehmt die Quadrat-Wurzel, welche nach den Tafeln am Ende dieses Buches = 11, 62 ist; so habt ihr die Quadrate, welche im Dreyecke Platz haben, welches hier Quadrat-Schuhe sind, weil alle Seiten nach Schuhen gemessen waren. Das Dreyeck hält also 11,62□′ d. i. 11 ganze und $\frac{62}{100}$ Quadrat-Schuh, d. i. nach §. 214 11□′ 62□″.

§. 253.

In den Tafeln am Ende dieses Buches sind die Quadrat-Wurzeln nur von den gan-

zen Zahlen bis auf 1000 zu finden. Sollte nun das Product, woraus man die Wurzel brauchet, noch größer als 1000 werden, so müßt ihr entweder selbst die Wurzel suchen, wie es am Ende des Buchs gelehrt wird, oder ihr könnt wie im folgenden Beyspiele verfahren.

§. 254.

Gesetzt nähmlich, eines Dreyeckes Seite sey 6°, die andern 4° 7′, die dritte 3° 1′; so habt ihr alles nach einerley Maß, nach lauter Schuhen ausgedrückt,

die ei- ne Seite $= 60'$)(so die die an- dre S. $= 47'$)(halbe die drit- te S. $= 31'$)(Sum. folgl. ——— die Sum. $= 138'$, al-	$= 69$ da-	von abgezogen die eine Seite läßt 9′ die andre Seite läßt 22′ die dritte Seite läßt 38′

und das Product aus den 4 Factoren 9. 22. 38. 69 wäre 519156 und viel zu groß, als daß ihr seine Wurzel aus den Tafeln finden solltet.

Multipliciret daher 1) den kleinsten und den grösten Factor 9 und 69 in einander, sie geben das Product 621.

Mul-

Multipliciret 2) die beyden mittlern Factoren 22 und 38 in einander: sie geben das Product 836.

Da nun beyde Producte 621 und 836 kleiner als 1000 sind; so könnt ihr aus den Tafeln ihre Wurzeln nehmen. Ihr findet darin
neben 621 die Wurzel 24,92
neben 836 die Wurzel 28,91. Multipliciret

beyde in	24 92
einander:	2242 8
das	19936
erhaltene	4984
Product	720,4372

kann für die Wurzel aus der Zahl 519156, dem Producte aus 621 . 836 oder 9 . 69 . 22 . 38 gelten, und gibt demnach den Flächeninhalt des Dreyeckes an, als = 720□′ 43□″ 72‴. Die 720 Ganze sind nähmlich wiederum Quadrat-Schuhe, weil alle Seiten nach Schuhen gemessen sind.

§. 255.

Bey diesem Verfahren kommt es also überhaupt darauf an, daß man die große Zahl (welche im obigen Beyspiel 519156 war) in zwey solche Factoren (621 und 836) zerfället, wovon keiner größer als 1000 ist, aus diesen Factoren die Wurzeln nimmt, diese beyden Wurzeln in einander multiplicirt, und ihr Pro-

duct Statt der Wurzel von der großen Zahl gebraucht. Dadurch findet man nun freylich die Wurzel der großen Zahl nicht so genau, als wenn man sie aus dieser Zahl unmittelbar ausziehet. Am Ende des Buches ist z. B. aus dieser nähmlichen Zahl 519156 die Wurzel geradezu gesucht und die Zahl = 720, 5241 funden, welche der wahren Wurzel näher kommt als die Zahl 720, 4372, so wir im vorigen §. dafür gefunden haben. Indessen beträgt der Unterschied nicht mehr als 0, 0869. d. i. $\frac{8^{\square'}}{100}$ und $\frac{69^{\square'}}{10000}$ oder $8^{\square''}$ und $69^{\square'''}$ welches nur ein sehr unbeträchtlicher Theil des ganzen Dreyeckes ist.

§. 256.

In andern Fällen wird der Fehler noch geringer seyn, in einigen aber allerdings etwas größer werden. Doch kann man sich versichert halten, daß der gröste mögliche Fehler, in den man durch diese Rechnungsart verfallen kann, niemahls 1 ganzes Quadrat betragen wird. Das heißt, wenn man die Seiten nach Schuhen ausdrückt; so kann man nicht um 1 Quadrat-Schuh fehlen: wenn man (wie es nur bey einem vielmahl größern Dreyecke nöthig wäre) die Seiten durch Ruthen ausgedrückt

hat;

hat; so kann man nicht um 1 Quadrat-Ruthe fehlen. Allemahl wird der Fehler so geringe seyn, daß er in Vergleichung mit dem ganzen Dreyecke ganz unbeträchtlich ist, und ich setze noch hinzu, daß bey allen andern gewöhnlichen Vermessungsarter noch weit größere Fehler möglich bleiben und nicht beachtet werden. Die trigonometrischeu Berechnungen haben freylich eine größere Genauigkeit, aber wie selten hält man diese bey den Messungen der Acker und Wiesen u. d. für nöthig, die wir hier hauptsächlich nur vor Augen haben.

§. 257.

Auch wird man bey diesen Messungen nicht leicht auf so große Zahlen gerathen, daß auch die beyden Factoren, worin man sie zerfällen kann, noch größer als 1000 wären. Besonders wenn man es in solchen Fällen auf einige Schuhe nicht ankommen läßt, sondern alles in Ruthen ausdrückt; und vor dergleichen kleinen Fehlern pflegt man sich ja selbst bey den Vermessungen der geraden Linien nur selten sicher zu stellen, sobald die Linien eine etwas beträchtliche Länge erhalten. Wer indessen auch solche Fehler in der Rechnung wenigstens vermeiden will, der suche sich von solchen Zahlen, die über 1000 gehen, selbst die Quadrat-Wurzeln nach folgender Rechnnngsart, welche bey allen noch so großen Zahlen Statt findet.

§. 258. Aufgabe.

Aus einer Zahl z. B. aus 8433216 die Quadrat-Wurzel zu ziehen.

Auflösung.

	IV.	III.	II.	I.	W.
	8	43	32	16	2904
A	4	..	..	..	
B	4	43	..	..	
C		(4)9	..	..	
D	4	41	..	..	
𝔅		2	32	..	
ℭ		(5	8)0	..	
𝔇		0	00	..	
b		2	32	16	
c			(58	0)4	
d		2	32	16	
𝔟		0	00	00	

1. Theilet die gegebene Zahl in Klassen zu zwey Ziffern von der Rechten nach der Linken zu; wobey denn bisweilen für die höchste (im Exempel die IVte) Klasse nur eine Ziffer übrig bleibt.

2. Un-

2. Unter den Quadrat=Zahlen

	1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81
der Wurzeln	1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

suchet die gröste (4) heraus, welche sich noch von den Zahlen der höchsten Klasse abziehen läßt. Ihre Wurzel (2) schreibet als den ersten Theil der gesuchten Wurzel unter W an, sie selbst aber schreibet neben A und ziehet sie von der höchsten Klasse wirklich ab.

Anm. in den folgenden Nummern leset von dem, was zwischen den Strichen gedruckt ist, für jetzt nur die oberste Reihe.

3. Neben den Rest	4 bey B 2 bey B 232 b. b	der bisweilen auch o seyn kann, ziehet die nächste Klasse herunter.

4. Unter die linke Ziffer der heruntergezogenen Klasse schreibet zwischen Klammern

das Duplum	(4) (58) (580)	des alten Wurzeltheiles	2 29 290

5. Ueberschlaget, wie oft das eingeklammerte Duplum in den über ihm stehenden Zahlen enthal=

ten sey, gleichsam als ob ihr dividiren wolltet;

den oftmahls nur	9	(welchen ihr wie beym
wahrscheinlichen	0	Dividiren niemahls hö-
Quotienten	4	her, als 9 ansetzen

könnt) schreibet als den neuen (wahrscheinlichen) Wurzeltheil unter W an, und auch neben das eingeklammerte Duplum unter die rechte Ziffer der zuletzt herabgezogenen Klasse hin.

6. Durch den neuen, oftmahls nur wahrscheinlichen Wurzeltheil, multipliciret die ganze Reihe

	C	das Product	D	und zie-	B	
neben	𝔈	schreibet ne-	𝔇	het es	𝔅	ab.
	c	ben	d	von	b	

Findet dies Abziehen des Productes wirklich Statt; so ist dies eine Anzeige, daß der zuletzt zugeschriebene Wurzeltheil wenigstens nicht zu groß gewählt sey. Könnt ihr aber das Product nicht abziehen, weil es zu groß ist; so müßt ihr Statt des zuletzt angeschriebenen Wurzeltheiles mit einer kleinern Ziffer versuchen. Doch müßt ihr diese Ziffer niemahls kleiner stehen lassen, als bis ihr überzeugt seyd, daß sich bey einer größern das Product nicht abziehen liesse. Dann ist sie die richtige Ziffer für den neuen Wurzeltheil.

Nun-

Nunmehr verfahret von neuem nach No. 3; 4; 5; und 6; so daß ihr unter dem, was zwischen Linien eingeschlossen ist, nur die 2te Reihe leset. Wenn ihr damit fertig seyd, so verfahret zum drittenmahle nach No. 3; 4; 5 und 6, so daß ihr diesmahl von dem eingeschlossenen bloß die dritte Reihe leset.

§. 259.

Zusatz.

Geht, am Ende alles auf, wie bey b; so ist dies ein Beweis, daß die unter W angeschriebene Zahl die ganz vollkommene Quadrat-Wurzel von der gegebenen Zahl ist. In der That werdet ihr finden, daß 2904. 2904 = 8433216 ist, oder daß 2904 durch sich selbst multiplicirt ganz genau 8433216 gibt. Solche Multiplication der gefundenen Wurzel ist ganz natürlich die beste Probe, ob die Wurzel richtig sey oder nicht.

§. 260.

Zusatz.

Wenn ihr hingegen z. B. mit der Zahl 519156 nach den Regeln des vorletzten §. verfahret; so bleibt bey b noch ein Rest 35

W

720, 52

	51	91	56		
A	49	..	..		
B	2	91	..		
C	(1	4)2	..		
D	2 8	4	..		
𝔅		7	56		
ℭ		(14	4)0		
𝔇		00	00		
b			756	00	
c			(144	0)5	
d			720	25	
b				3575	00
c				(1441)	0)2
d				2882	04
					69296

übrig, da es doch keine Klasse von Zahlen mehr herunter zu ziehen gibt. In solchen Fällen setzet selbst eine neue Klasse von 00 hinzu, und fahret fort, nach den Regeln wie vorher einen neuen Wurzeltheil zu finden; so gibt dieser neue Wurzeltheil die Zehntel der Wurzel an. In der Reihe b schreibet abermahls eine neue Klasse von 00 hinzu, so könnt ihr auf die nähmliche Weise auch die Hunderttel der Wurzel finden. Wenn eine noch größere Genauigkeit nöthig wäre, so könnte man auf die nähmliche Weise bey Anschreibung neuer Klassen von 00 fortfahren, auch die Tausendtel, Zehntausendtel u. s. w. der Wurzel zu finden: ob man gleich die Wurzel niemahls ganz genau finden wird. Setzet man im Exempel noch 2 Klassen hinzu, so findet man 720, 5241.

In

In den folgenden Tafeln

findet man in den Columnen unter 0 die Wurzeln von den Zahlen 1; 2; 3 bis 100;

in den Columnen unter 100 die Wurzeln von den Zahlen 101; 102; 103 ꝛc. bis 199 und 100+100 oder 200;

in den Columnen unter 200 die Wurzeln von den Zahlen 201; 202; 203 ꝛc. bis 299 und 200+100 oder 300 und so fort, daß man endlich iu der Columne unter 900 die Wurzeln von 901; 902; 903 ꝛc. bis 999 und 900+100 oder 1000 findet.

Wenn die bey diesen Wurzelzahlen noch fehlenden Tausendtel, Zehntausendtel, Hunderttausendtel ꝛc. mehr als 5 Tausendtel betrugen; so wurde Statt dieses Fehlers ein ganzes Hunderttel zu den schon vorhandenen Hunderteln hinzugerechnet: daher denn keine von den abgedruckten Zahlen um volle 5 Tausendtel von der wahren Wurzel abweichet.

Uebrigens sind diese Tafeln aus der bekannten Schulzischen Sammlung logarithmischer, trigonometrischer ꝛc. Tafeln Berlin 1778 genommen, doch nicht ohne alle Prüfung abgedruckt, wodurch sich indessen nur ein Druckfehler entdeckt hat, nähmlich bey der Wurzel von 963 deren erste Zahlen 31,03 und nicht 31,02 sind.

	0	100	200	300	400
1	1,00	10,05	14,18	17,35	20,02
2	1,41	10	21	38	05
3	1,73	15	25	41	07
4	2,00	20	28	44	10
5	24	25	32	46	12
6	45	30	35	49	15
7	65	34	39	52	17
8	2,83	39	42	55	20
9	3,00	44	46	58	22
10	3,16	10,49	14,49	17,61	20,25
11	32	54	53	64	27
12	46	58	56	66	30
13	61	63	59	69	32
14	74	68	63	72	35
15	3,87	72	66	75	37
16	4,00	77	70	78	40
17	12	82	73	80	42
18	24	86	76	83	45
19	36	91	80	86	47
20	4,47	10,95	14,83	17,89	20,49
21	58	11,00	87	92	52
22	69	05	90	94	54
23	80	09	93	17,97	57
24	4,90	14	14,97	18,00	59
25	5,00	18	15,00	03	62
26	10	22	03	06	64
27	20	27	07	08	66
28	29	31	10	11	69
29	39	36	13	14	71
30	5,48	11,40	15,17	18,17	20,74
31	57	45	20	19	76
32	66	49	23	22	78
33	74	53	26	25	81
34	83	58	30	28	83
35	5,92	62	33	30	86
36	6,00	66	36	33	88
37	08	70	39	36	90
38	16	75	43	38	93
39	24	79	46	41	95
40	6,32	11,83	15,49	18,44	20,98
41	40	87	52	47	21,00
42	48	92	56	49	02
43	56	11,96	59	52	05
44	63	12,00	62	55	07
45	71	04	65	57	10
46	78	08	68	60	12
47	86	12	72	63	14
48	6,93	17	75	65	17
49	7,00	21	78	68	19
50	7,07	12,25	15,81	18,71	21,21

	500	600	700	800	900
1	22,38	24,52	26,48	28,30	30,02
2	41	54	50	32	03
3	43	56	51	34	05
4	45	58	53	35	07
5	47	60	55	37	08
6	49	62	57	39	10
7	52	64	59	41	12
8	54	66	61	43	13
9	56	68	63	44	15
10	22,58	24,70	26,65	28,46	30,17
11	61	72	66	48	18
12	63	74	68	50	20
13	65	76	70	51	22
14	67	78	72	53	23
15	69	80	74	55	25
16	72	82	76	57	27
17	74	84	78	58	28
18	76	86	80	60	30
19	78	88	81	62	32
20	22,80	24,90	26,83	28,64	30,33
21	83	92	85	65	35
22	85	94	87	67	36
23	87	96	89	69	38
24	89	24,98	91	71	40
25	91	25,00	93	72	41
26	93	02	94	74	43
27	96	04	96	76	45
28	22,98	06	26,98	77	46
29	23,00	08	27,00	79	48
30	23,02	25,10	27,02	28,81	30,50
31	04	12	04	83	51
32	07	14	06	84	53
33	09	16	07	86	55
34	11	18	09	88	56
35	13	20	11	90	58
36	15	22	13	91	59
37	17	24	15	93	61
38	19	26	17	95	63
39	22	28	18	97	64
40	23,24	25,30	27,20	28,98	30,66
41	26	32	22	29,00	68
42	28	34	24	02	69
43	30	36	26	03	71
44	32	38	28	05	72
45	35	40	29	07	74
46	37	42	31	09	76
47	39	44	33	10	77
48	41	46	35	12	79
49	43	48	37	14	81
50	23,45	25,50	27,39	29,15	30,82

	0	100	200	300	400
51	7,14	12,29	15,84	18,73	21,24
52	21	33	87	76	26
53	28	37	91	79	28
54	35	41	94	81	31
55	42	45	97	84	33
56	48	49	16,00	87	35
57	55	53	03	89	38
58	62	57	06	92	40
59	68	61	09	95	42
60	7,75	12,65	16,12	18,97	21,55
61	81	69	16	19,00	47
62	87	73	19	03	49
63	7,94	77	22	05	52
64	8,00	81	25	08	54
65	06	85	28	10	56
66	12	88	31	13	59
67	19	92	34	16	61
68	25	12,96	37	18	63
69	31	13,00	40	21	66
70	8,37	13,04	16,43	19,24	21,68
71	43	08	46	26	70
72	49	11	49	29	73
73	54	15	52	31	75
74	60	19	55	34	77
75	66	23	58	36	79
76	72	27	61	39	82
77	77	30	64	42	84
78	83	34	67	44	86
79	89	38	70	47	89
80	8,94	13,42	16,73	19,49	21,91
81	9,00	45	76	52	93
82	06	49	79	54	95
83	11	53	82	57	98
84	17	56	85	60	21,00
85	22	60	88	62	02
86	27	64	91	65	05
87	33	67	94	67	07
88	38	71	16,97	70	09
89	43	75	17,00	72	11
90	9,49	13,78	17,03	19,75	22,14
91	54	82	06	77	16
92	59	86	09	80	18
93	64	89	12	82	20
94	70	93	15	85	23
95	75	96	18	87	25
96	80	14,00	20	90	27
97	85	04	23	92	29
98	90	07	26	95	32
99	9,95	11	29	97	34
100	10,00	14,14	17,32	20,00	22,36

	500	600	700	800	900
51	23,47	25,51	27,40	29,17	30,84
52	49	53	42	19	85
53	52	55	44	21	87
54	54	57	46	22	89
55	56	59	48	24	90
56	58	61	50	26	92
57	60	63	51	27	94
58	62	65	53	29	95
59	64	67	55	31	97
60	23,66	25,69	27,57	29,33	30,98
61	69	71	59	34	31,00
62	71	73	60	36	02
63	73	75	62	38	03
64	75	77	64	39	05
65	77	79	66	41	06
66	79	81	68	43	08
67	81	83	69	44	10
68	83	85	71	46	11
69	85	87	73	48	13
70	23,87	25,88	27,75	29,50	31,14
71	90	90	77	51	16
72	92	92	78	53	18
73	94	94	80	55	19
74	96	96	82	56	21
75	98	98	84	58	22
76	24,00	26,00	86	60	24
77	02	02	87	61	26
78	04	04	89	63	27
79	06	06	91	65	29
80	24,08	26,08	27,93	29,66	31,30
81	10	10	95	68	32
82	12	12	96	70	34
83	15	13	27,98	72	35
84	17	15	28,00	73	37
85	19	17	02	75	38
86	21	19	04	77	40
87	23	21	05	78	42
88	25	23	07	80	43
89	27	25	09	82	45
90	24,29	26,27	28,11	29,83	34,46
91	31	29	12	85	48
92	33	31	14	87	50
93	35	32	16	88	51
94	37	34	18	90	53
95	39	36	20	92	54
96	41	38	21	93	56
97	43	40	23	95	58
98	45	42	25	97	59
99	77	44	27	29,98	61
100	24,49	26,46	28,28	30,00	31,62

In der 1sten Zeichnung sind die beyden Vertical-Winkel durch x, y; in der 26sten Zeichnung die beyden rechten durch n, m zu bezeichnen.

Seite 9 Zeile 2 von unten Statt: auf eine, lies: auf eine andere

— 14 — 2 — — — — C, lies: F

— 14 — 3 — — — — C, lies: E

— 19 — 2 — — — 8‴ lies: 8″

— 20 — 6 von oben — 189‴ lies: 198‴

— 30 — 6 — — — Duodecimal, lies: Decimal

— 30 — 7 — — — Decimal, lies: Duodecimal

— 35 — 2 — — — 42ste, lies: 24ste

— 37 — 12 von unten — B lies: BD

— 63 — 13 — — — Und ihr, lies: Ihr

— 64 — 13 — — — † (Anmerk. 2) lies: (s. Anmerk. 2)

— 70 — 1 — — — 23.24 lies: 28.29

— 70 — 13 — — — Seiten, lies: Stücken

— 74 — 11 — — — AC lies: BC

— 80 — 15 — — — b lies: β

— 80 — 16 — — — a lies: α

— 94 — 4 von unten — E lies: F

— 106 — 3 von oben — n lies: m

— 107 — 10 von unten — Fläche, lies: ebne Fläche

— 110 — 4 u. 11 — — — 38 lies: 47

— 111 — 9 — — — BCD lies: ACD

— 111 — 11 — — — CD lies: CA

— 112 — 9 u. 13 — — B lies: A

— 116 — 14 — — — □′ lies: □○

— 120 — 7 — — — 40 lies: 43

— 121 — 4 von oben — 4.4 lies: 3.3

— 122 — 9 von unten — CFAB lies: EFAB

— 125 — 7 — — — DEHF lies: DEHC

— 139 — 4 — — — — (s-a) lies: $\sqrt{(s-a)}$

Auf der Tafeln 3ten S. Z. 11 statt 21,55 lies: 21,45

Der Buchbinder hat diese b

Erklärung der Zeichen.

Die folgenden Zeichen werden erklärt, wo sie zum ersten Mahle gebraucht sind.

°′ ″ ‴ ⁗ bedeuten: Ruthe, Schuh, Zoll, Strich, Scrupel Man sehe §. 27.

° ′ ″ ꝛc. bedeuten zugleich auch: Grad, Minute, Secunde ꝛc. und auch: Gradwinkel, Minuten-Winkel ꝛc. §. 77. §. 81

\+ das Zeichen der Addition §. 26.
— das Zeichen der Subtraction §. 103.
. das Zeichen der Multiplication §. 215.
≌ Zeichen der Deckung §. 114.
= wird gelesen: ist (sind) gleich.
∥ — — — ist parallel.
△ — — — das Dreyeck.
∠ — — — der Winkel.

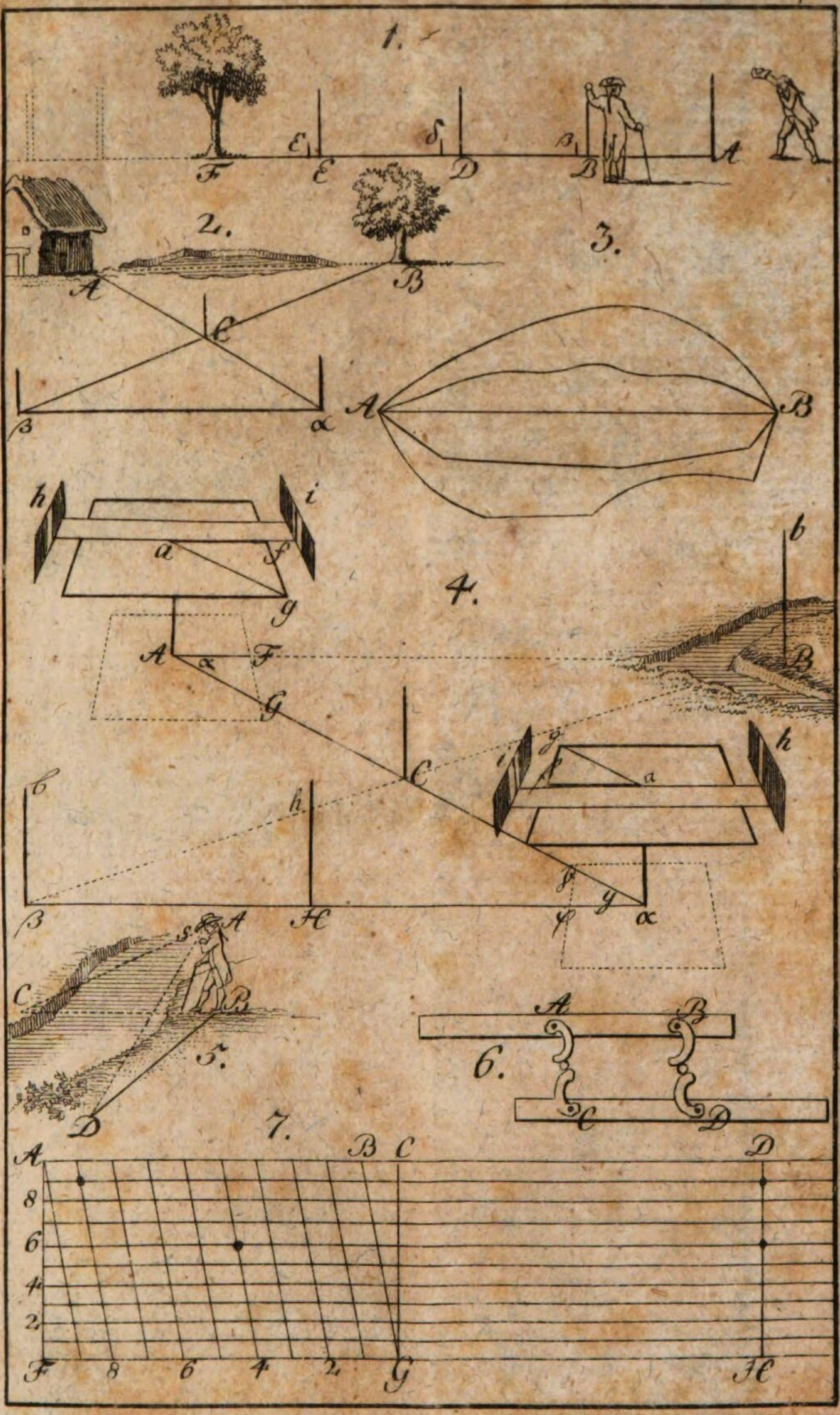
Die griechischen Buchstaben α, β. δ, ε, φ, γ heissen alpha, bita, delta, epsilon, phi, gamma und entsprechen den lateinischen A, B, D, E, F, G. Diese ähnliche und doch verschiedene Gestalt und Benennung der beyden Alphabete verschafft besonders beym mündlichen

Un-

Unterrichte einen ungemein bequemen Gebrauch in der Bezeichnung solcher Puncte und Linien, die sich in einer gewissen Ordnung auf einander beziehen.

Die Druckfehler, welche auf der letzten Seite des Buches angezeigt sind, hat man vorläufig zu verbessern. Es gehören dazu noch folgende:

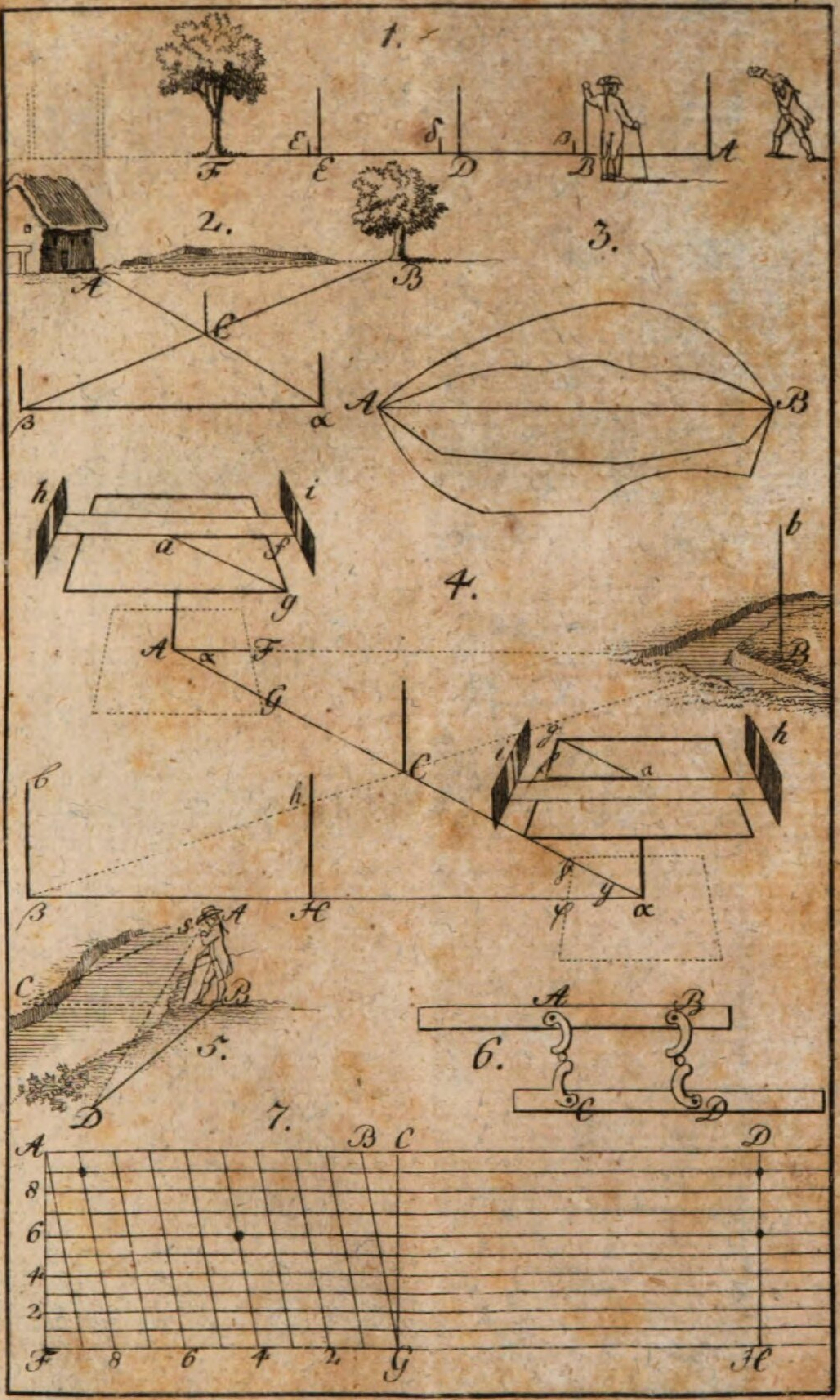
Seite	9	Zeile	7	von unten	Statt	B	lies	F
—	23	—	4	von oben	—	2	lies	7
—	79	—	1	von unten	—	αγ	lies	ag
—	—	—	4 u. 7	— —	—	ag	lies	ag
—	—	—	8	— —	—	a	lies	a


1.
F
E
D
B
A
2.
A
B
C
β
α
3.
A
B
4.
h
i
a
f
g
A
F
G
C
b
B
β
H
α
5.
C
A
B
D
6.
A
B
C
D
7.
A
B
C
D
8
6
4
2
F
8
6
4
2
G
H

Unterrichte einen ungemein bequemen Gebrauch in der Bezeichnung solcher Puncte und Linien, die sich in einer gewissen Ordnung auf einander beziehen.

Die Druckfehler, welche auf der letzten Seite des Buches angezeigt sind, hat man vorläufig zu verbessern. Es gehören dazu noch folgende:

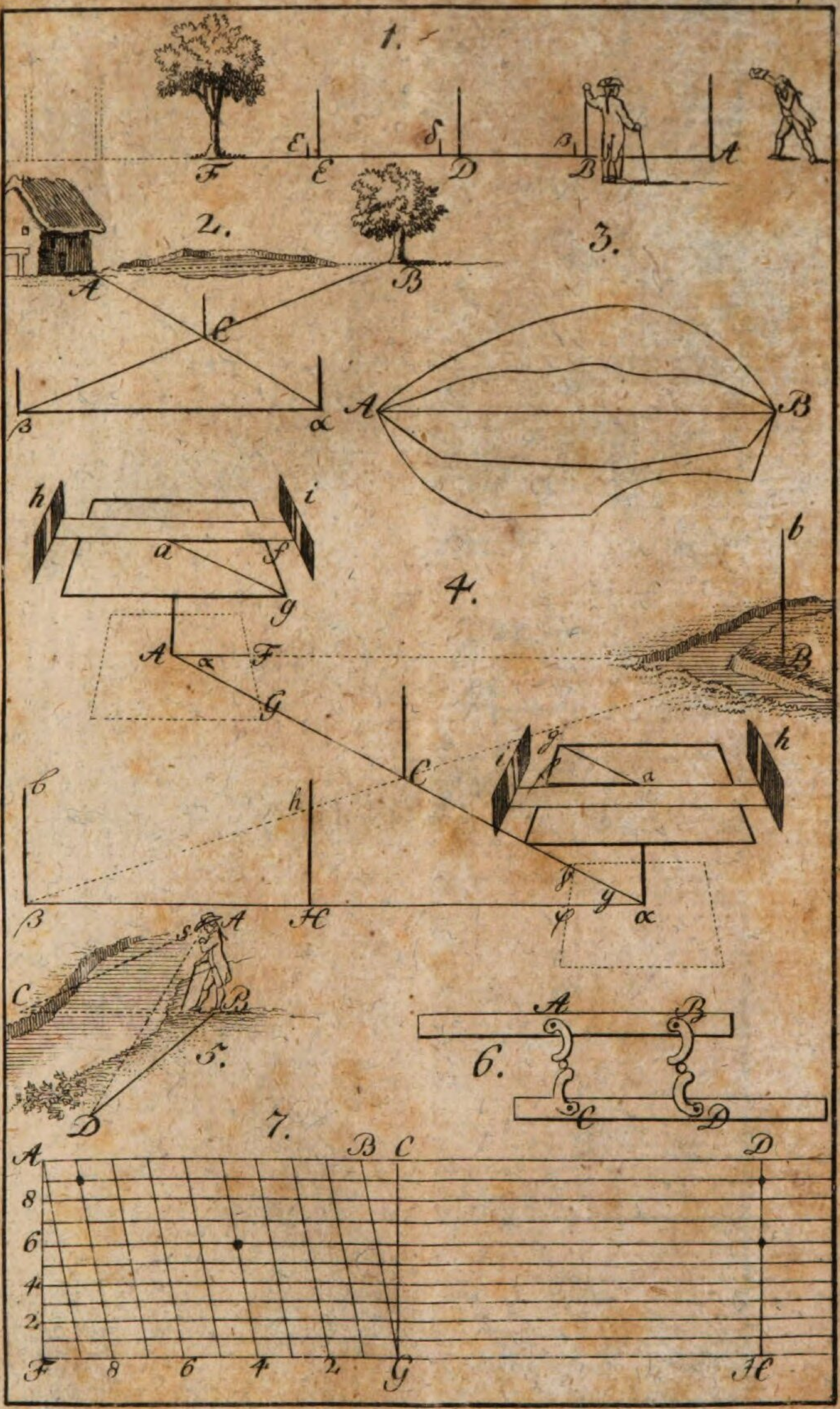
Seite	9	Zeile	7	von unten	Statt	B	lies	F
—	23	—	4	von oben	—	2	lies	7
—	79	—	1	von unten	—	$\alpha\gamma$	lies	ag
—	—	—	4 u. 7	— —	—	ag	lies	ag
—	—	—	8	— —	—	a	lies	a


1.
F
E
D
B
A
2.
3.
A
B
C
β
α
A
B
h
i
a
f
g
4.
b
A
F
G
B
C
i
g
f
a
h
b
h
β
H
α
A
B
C
5.
D
A
B
6.
C
D
7.
A
B
C
D
8
6
4
2
F
8
6
4
2
G
H

Unterrichte einen ungemein bequemen Gebrauch in der Bezeichnung solcher Puncte und Linien, die sich in einer gewissen Ordnung auf einander beziehen.

Die Druckfehler, welche auf der letzten Seite des Buches angezeigt sind, hat man vorläufig zu verbessern. Es gehören dazu noch folgende:

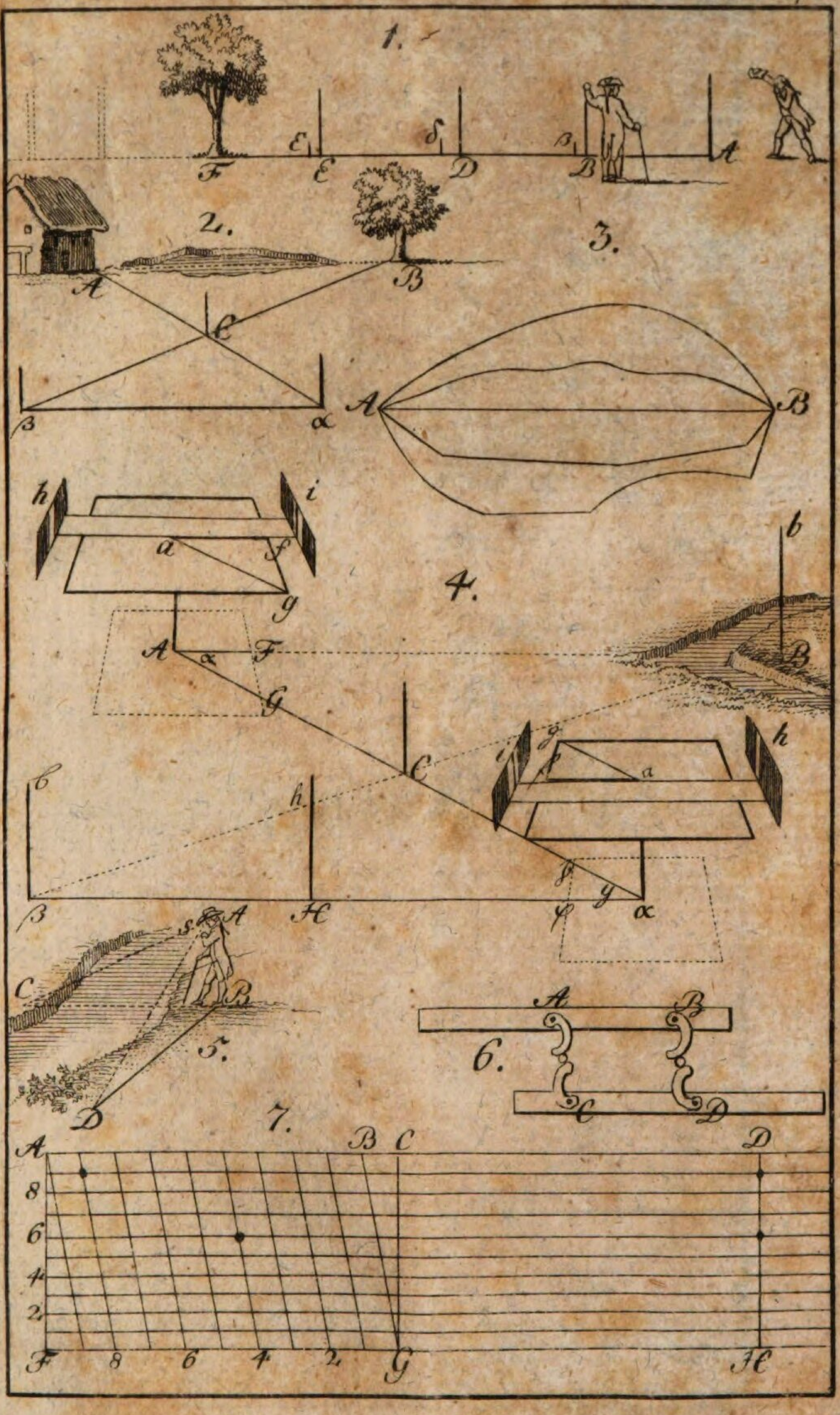
Seite	9	Zeile	7	von unten	Statt	B	lies	F
—	23	—	4	von oben	—	2	lies	7
—	79	—	1	von unten	—	αγ	lies	ag
—	—	—	4 u. 7	— —	—	ag	lies	ag
—	—	—	8	— —	—	a	lies	a


1.
ε
δ
β
F
E
D
B
A
2.
3.
A
B
C
β
α
A
B
h
i
a
f
g
4.
b
A
α
F
B
G
C
c
h
H
β
φ
y
α
5.
A
C
B
D
6.
A
B
C
D
7.
A
B
C
D
8
6
4
2
F
8
6
4
2
G
H

Unterrichte einen ungemein bequemen Gebrauch in der Bezeichnung solcher Puncte und Linien, die sich in einer gewissen Ordnung auf einander beziehen.

Die Druckfehler, welche auf der letzten Seite des Buches angezeigt sind, hat man vorläufig zu verbessern. Es gehören dazu noch folgende:

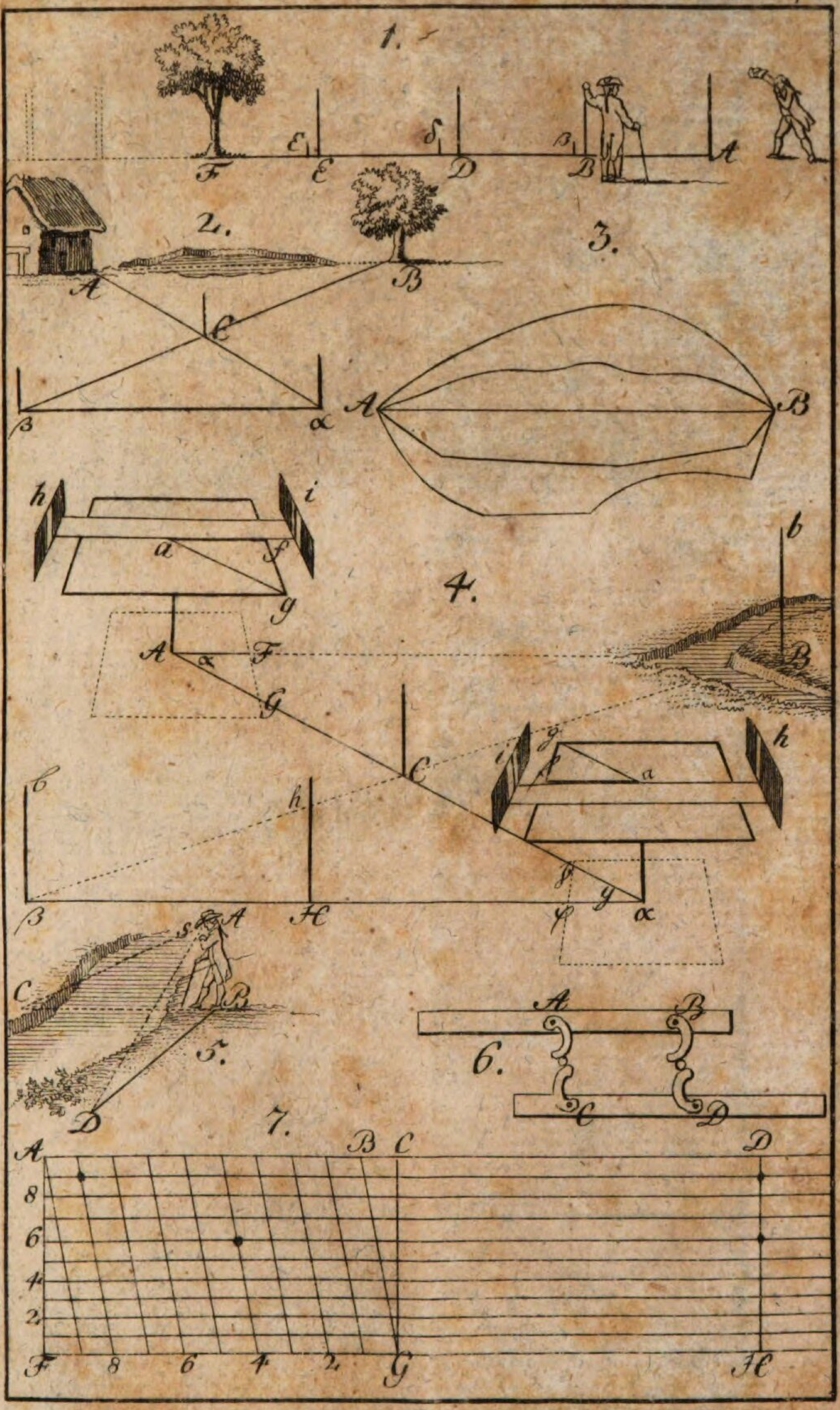
Seite	9	Zeile	7	von unten	Statt	B	lies F
—	23	—	4	von oben	—	2	lies 7
—	79	—	1	von unten	—	αγ	lies ag
—	—	—	4 u. 7	— —	—	ag	lies ag
—	—	—	8	— —	—	a	lies a

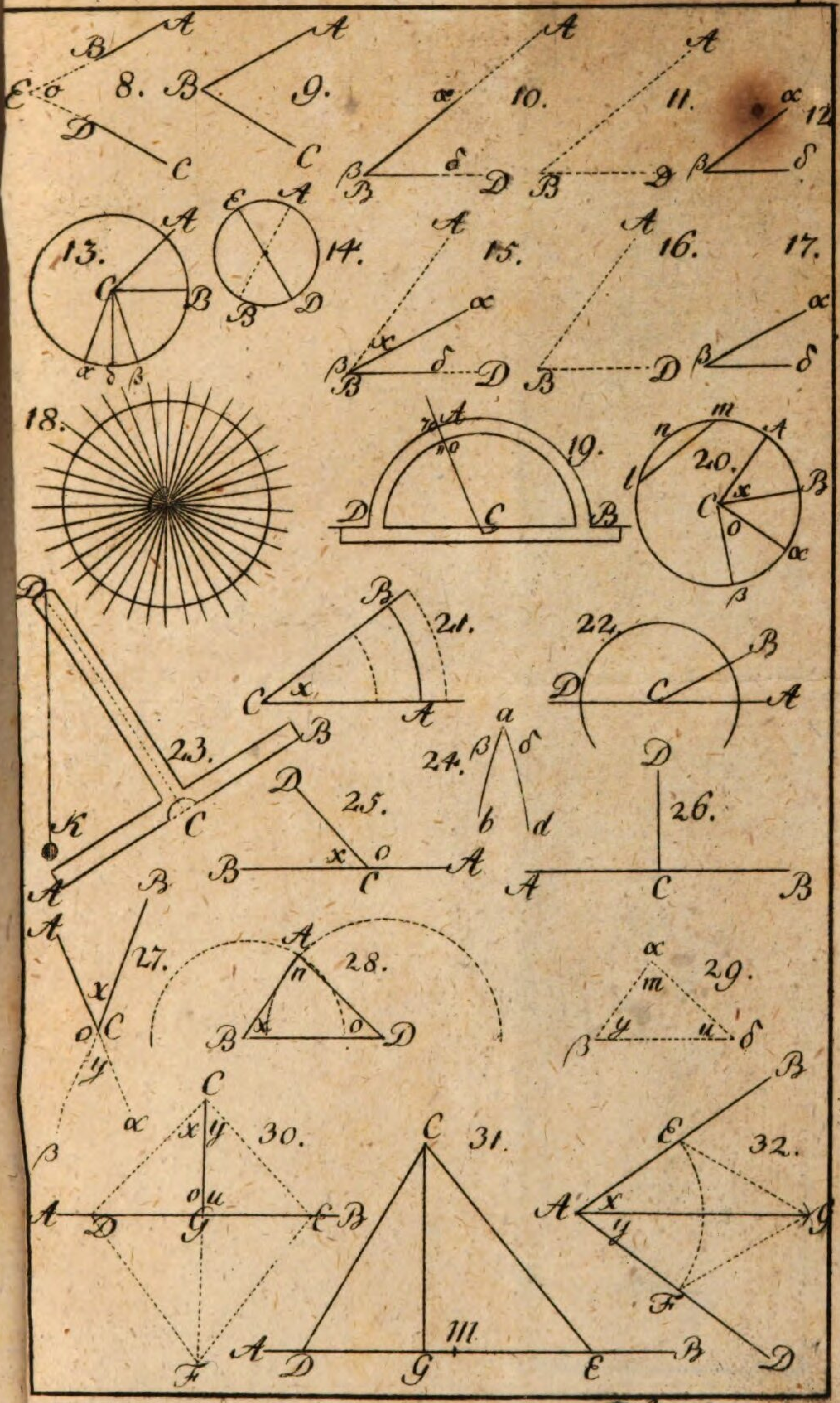

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
A
B
C
D
E
F
G
H
8
6
4
2

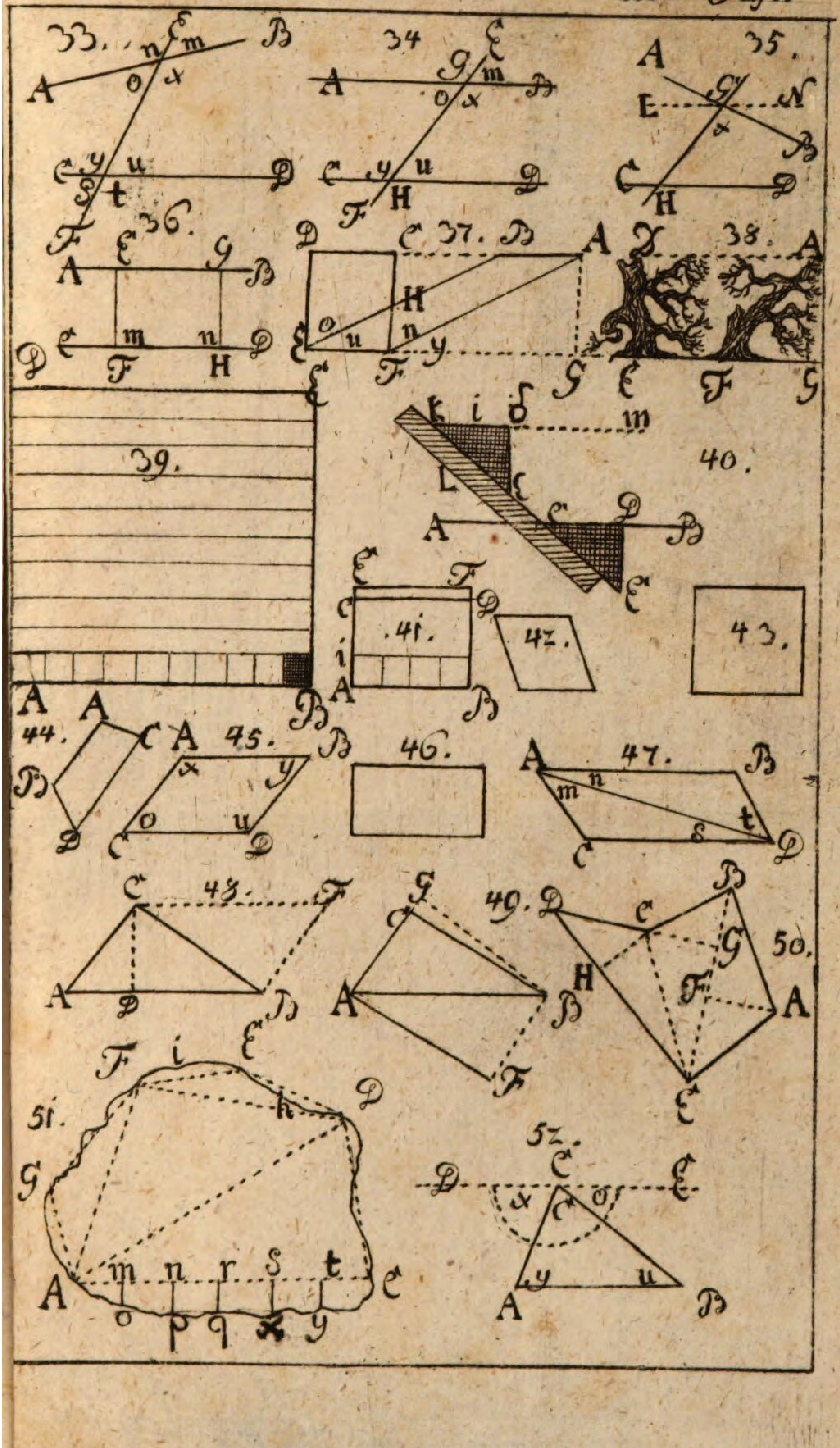
Unterrichte einen ungemein bequemen Gebrauch in der Bezeichnung solcher Puncte und Linien, die sich in einer gewissen Ordnung auf einander beziehen.

Die Druckfehler, welche auf der letzten Seite des Buches angezeigt sind, hat man vorläufig zu verbessern. Es gehören dazu noch folgende:

Seite	9	Zeile	7	von unten	Statt	B	lies	F
—	23	—	4	von oben	—	2	lies	7
—	79	—	1	von unten	—	αγ	lies	ag
—	—	—	4 u. 7	— —	—	ag	lies	ag
—	—	—	8	— —	—	a	lies	a


1.
F
E
D
B
A
2.
3.
A
B
C
β
α
4.
h
i
a
f
g
A
F
G
C
b
B
H
5.
C
D
6.
7.
A
B
C
D
8
6
4
2
F
G
H


8.
9.
10.
11.
12
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.


33.
34
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Busse, Friedrich Gottlieb von,

Erste Geometrie für Kinder und Jünglinge und fürs gemeine Leben

Dessau 1784

Math.p. 171
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081820-5
VD18 12998052